

Problema estimării frecvențelor unor semnale sinusoidale în prezența zgomotului

Modelul semnalului. Caracteristici spectrale și de corelație

Să considerăm cazul unor exponențiale complexe în prezența unui zgomot alb, necorelat cu semnalul, de valoare medie nulă și dispersie σ_w^2 :

$$y(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j\phi_i} e^{j\omega_i n} + w(n) = \sum_{i=1}^P x_i(n) + w(n)$$

- Amplitudinile $A_i \in [0, \infty)$ și frecvențele unghiulare $\omega_i \in [-\pi, \pi]$ se presupun deterministe, dar necunoscute;
- fazele ϕ_i sunt variabile aleatoare necorelate, uniform distribuite în $[-\pi, \pi]$.

Modelul ARMA

$$x_i(n) = A_i e^{j\varphi_i} e^{jn\omega_i}$$

$$x_i(n) = e^{j\omega_i} x_i(n-1)$$

sau introducând operatorul “întârziere cu un tact” q^{-1} ,

$$x_i(n) = e^{j\omega_i} q^{-1} x_i(n) \Rightarrow (1 - e^{j\omega_i} q^{-1}) x_i(n) = 0$$

Pentru $P=1$

$$\begin{aligned}y(n-1) &= x_i(n-1) + w(n-1) \\ y(n) &= x_i(n) + w(n)\end{aligned}$$

Înmulțind prima ecuație cu $e^{j\omega_i}$ și scăzând-o din a doua se elimină $x_i(n)$:

$$\left(1 - e^{j\omega_i} q^{-1}\right)y(n) = \left(1 - e^{j\omega_i} q^{-1}\right)w(n)$$

În cazul general a P componente se obține deci

$$A(q)y(n) = A(q)w(n) \quad \text{unde} \quad A(q) = \prod_{i=1}^P \left(1 - e^{j\omega_i} q^{-1}\right)$$

Observații

-Este o formă particulară de model ARMA (model ARMA degenerat)

-Polinomul $A(q)$ poartă informația completă asupra frecvențelor $\{\omega_i\}_{i=1}^P$,

deoarece rădăcinile sale sunt

$$q_i = e^{j\omega_i} \quad i = 1, \dots, P$$

-Scriind

$$A(q) = \sum_{i=0}^P a_i q^{-i}, \quad a_0 = 1$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^P a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^P a_i w(n-i)$$

Funcția de autocorelație

Evaluăm mai întâi

$$\begin{aligned} F(i, l) &= E\{x_i(n)x_l^*(n)\} = E\{A_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega_i n} A_l e^{-j\varphi_l} e^{-j\omega_l n}\} = \\ &= A_i A_l e^{j(\omega_i - \omega_l)n} E\{e^{j\varphi_i} e^{-j\varphi_l}\} \end{aligned}$$

Pentru $i = l$,

$$E\{e^{j\varphi_i} e^{-j\varphi_l}\} = 1$$

iar pentru $i \neq l$

$$E\{e^{j\varphi_i} e^{-j\varphi_l}\} = E\{e^{j\varphi_i}\} E\{e^{-j\varphi_l}\} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\varphi} d\varphi \right] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\varphi} d\varphi \right] = 0$$

deci

$$F(i, l) = \begin{cases} A_i^2, & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

La fel se deduce că

$$E\{x_i(n)x_l^*(n-k)\} = \begin{cases} A_i^2 e^{jk\omega_i}, & i = l \\ 0 & i \neq l \end{cases}$$

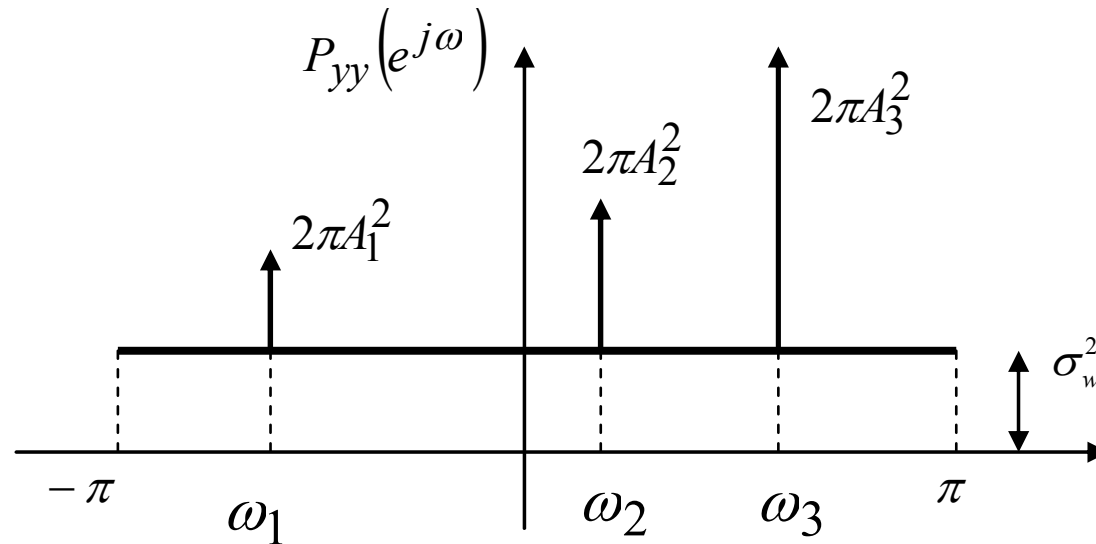
așa încât rezultă

$$\begin{aligned} r_{yy}(k) &= E\{y(n)y^*(n-k)\} = E\left\{\sum_{i=1}^P x_i(n)\sum_{l=1}^P x_l^*(n-k)\right\} + E\{w(n)w^*(n-k)\} = \\ &= \left\{\sum_{i=1}^P \sum_{l=1}^P E\{x_i(n)x_l^*(n-k)\}\right\} + \sigma_w^2 \delta(k) = \sum_{i=1}^P A_i^2 e^{jk\omega_i} + \sigma_w^2 \delta(k) \end{aligned}$$

Densitatea spectrală de putere

Se calculează ca transformată Fourier în timp discret a funcției de autocorelație.

$$P_{yy}(e^{j\omega}) = \text{TFTD}\{r_{yy}(k)\} = 2\pi \sum_{i=1}^P A_i^2 \delta(\omega - \omega_i) + \sigma_w^2$$



Vectorul de date

$$\mathbf{y}(n) = [y(n), y(n-1), \dots, y(n-N+1)]^T$$

Vectorii frecvență

$$\mathbf{e}_i = [1, e^{-j\omega_i}, e^{-2j\omega_i}, \dots, e^{-j(N-1)\omega_i}]^T, \quad i = 1, \dots, P$$

Matricea de autocorelație \mathbf{R} asociată vectorului de date este

$$\mathbf{R} = \mathbb{E}\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \begin{bmatrix} r_{yy}(0) & r_{yy}(1) & \dots & r_{yy}(N-1) \\ r_{xx}(-1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(N-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(-(N-1)) & r_{xx}(-(N-2)) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_c(n) = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_P(n)]$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1(n), \mathbf{e}_2(n), \dots, \mathbf{e}_P(n)]$$

Deoarece

$$y(n-k) = \sum_{i=1}^P x_i(n-k) + w(n-k) = \sum_{i=1}^P x_i(n) e^{-jk\omega_i} + w(n-k)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\mathbf{x}_c(n) + \mathbf{w}(n)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{E}\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{A}\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\mathbf{A}^H\} + \mathbf{E}\{\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n)\} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{E}\{\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\}\mathbf{A}^H + \sigma_w^2\mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\mathbf{P} \triangleq E\{\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\} = \text{diag}\{A_1^2, A_2^2, \dots, A_P^2\}$$

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{x}_c(n)\mathbf{x}_c^H(n)\}\mathbf{A}^H + \sigma_w^2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma_w^2\mathbf{I}$$

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(n)\mathbf{y}(n)^H\} = \sum_{i=1}^P A_i^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H + \sigma_w^2 \mathbf{I},$$

Dar

$$\mathbf{R}_S = \sum_{i=1}^P A_i^2 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H$$

este *matricea de autocorelație a semnalului*, iar

$$\mathbf{R}_W = \sigma_w^2 \mathbf{I}$$

este *matricea de autocorelație a zgomotului*, deci:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_W$$

Valori proprii, vectori proprii

Vom presupune $N > P$.

Rangul matricei \mathbf{R}_S este P , iar al matricelor \mathbf{R}_W deci și \mathbf{R} , este N .

În consecință, matricea \mathbf{R}_S are P valori proprii λ_{Si} , $i = 1, \dots, P$ nenule (pozitive), iar restul de $N - P$ sunt nule.

Vectorii proprii \mathbf{v}_i asociați valorilor proprii nenule poartă numele de *vectori proprii principali*. În consecință, \mathbf{R}_S poate fi exprimat sub forma:

$$\mathbf{R}_S = \sum_{i=1}^P \lambda_{Si} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

Vectorii \mathbf{v}_i definesc același *subspațiu al semnalelor* P -dimensional ca și vectorii \mathbf{e}_i .
Într-adevăr, ei sunt ortogonali și satisfac relația:

$$\mathbf{R}_S \mathbf{v}_i = \lambda_{Si} \mathbf{v}_i$$

$$\sum_{k=1}^P A_k^2 \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \mathbf{v}_i = \lambda_{Si} \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^P \frac{A_k^2}{\lambda_{Si}} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \mathbf{v}_i = \sum_{k=1}^P \left(\frac{A_k^2}{\lambda_{Si}} \mathbf{e}_k^H \mathbf{v}_i \right) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^P \alpha_{ik} \mathbf{e}_k$$

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

deci

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^P \lambda_{Si} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_w^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^P (\lambda_{Si} + \sigma_w^2) \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma_w^2 \sum_{i=P+1}^N \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

Din relația de mai sus rezultă că se pot împărți vectorii proprii λ_i ai matricei de autocorelație în două categorii

-*vectorii proprii principali*, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_P$, care corespund valorilor proprii

$$\lambda_i = \lambda_{S_i} + \sigma_w^2, \quad i = 1, \dots, P$$

(cele mai mari); ei sunt în același timp vectori proprii ai matricei de autocorelație a semnalului; vom spune că aceștia generează *subspațiul semnal* și îi vom nota

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, P$$

Cu aceștia se formează matricea

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_P] \quad (N \times P)$$

-vectorii proprii $\mathbf{v}_{P+1}, \dots, \mathbf{v}_N$, corespund toți valorilor proprii $\lambda_{P+1}, \lambda_{P+2}, \dots, \lambda_N = \sigma_w^2$; ei generează *subspațiul zgomot*. Acești vectori se vor nota

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{v}_{P+i}, \quad i = 1, \dots, N - P$$

și cu ei se formează matricea

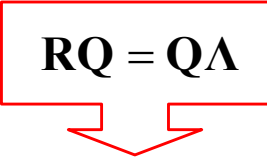
$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{N-P}] \quad (N \times (N - P))$$

$$\mathbf{Q} \triangleq [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N]$$

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{QA}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_P\} \quad \mathbf{\Lambda}_2 = \text{diag}\{\lambda_{P+1}, \dots, \lambda_N\}$$

$$\mathbf{RQ} = \mathbf{QA}$$


$$\mathbf{R}[\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}[\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] = [\mathbf{S} \quad \mathbf{G}] \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{RS} = \mathbf{S}\Lambda_1$$

$$\mathbf{RG} = \mathbf{G}\Lambda_2$$

Din ultima relație

$$\mathbf{RG} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \lambda_{P+1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} = \sigma_w^2 \mathbf{G} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H \mathbf{G} + \sigma_w^2 \mathbf{G}$$

de unde

$$\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

Dar \mathbf{P} este o matrice diagonală cu elemente nenule pe diagonală, iar \mathbf{A} este de tip Vandermonde, deci are rangul egal cu numărul de coloane, așa încât rezultă

$$\mathbf{A}^H \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

ceea ce implică

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{g}_k = 0, \quad \forall i, k, \quad i = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, N - P$$

deci

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{G} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, P$$

Totodată, relația de mai sus implică

$$\mathbf{A}^H \mathbf{g}_k = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, N - P$$

ceea ce înseamnă că vectorii \mathbf{g}_k aparțin spațiului nul al matricei \mathbf{A}^H :

$$\mathbf{g}_k \in \mathbf{N}(\mathbf{A}^H)$$

sau spațiul coloană al matricei \mathbf{G} este identic cu spațiul nul al matricei \mathbf{A}^H :

$$\mathbf{C}(\mathbf{G}) = \mathbf{N}(\mathbf{A}^H)$$

Dar din ortogonalitatea vectorilor proprii rezultă

$$\mathbf{C}(\mathbf{G}) = \mathbf{N}(\mathbf{S}^H)$$

Din ultimele două relații

$$N(\mathbf{S}^H) = N(\mathbf{A}^H)$$

În mod asemănător se deduce că

$$C(\mathbf{S}) = C(\mathbf{A})$$

În consecință vectorii \mathbf{e}_i generează același subspațiu ca și vectorii proprii principali și sunt ortogonali pe subspațiul zgomot.

Pornind de la observațiile de mai sus există două categorii de metode de estimare a frecvențelor. Unele se bazează pe subspațiul semnal, celelalte pe subspațiul zgomot.