

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Poate fi privit ca o extindere a algoritmului NLMS.

Reactualizarea coeficienților se face pornind de la minimizarea normei euclidiene a variației

$$\delta \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$$

cu condițiile

$$d(n-k) = \mathbf{w}^H(n+1)x(n-k), \quad k = 0, \dots, M-1$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Funcția cost

$$J(n) = \|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \operatorname{Re}\{\lambda_k^* [d(n-k) - \mathbf{w}^H(n+1)x(n-k)]\}$$

Pentru a sistematiza scrierea vom defini următoarele **structuri**

- **Vectorii semnalelor din linia de întârziere a filtrului**, pentru cele M momente de timp

$$\mathbf{x}(n-k) = [x(n-k), x(n-k-1), \dots, x(n-k-N+1)]^T, \quad k = 0, \dots, M-1$$

- **Matricea având drept coloane acești vectori**

$$\mathbf{A}^H(n) = [\mathbf{x}(n), \mathbf{x}(n-1), \dots, \mathbf{x}(n-M+1)]$$

- **Vectorul semnalelor dorite**

$$\mathbf{d}^H(n) = [d(n), d(n-1), \dots, d(n-M+1)]$$

- **Vectorul multiplicatorilor Lagrange**

$$\boldsymbol{\lambda}^H = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}]$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Relațiile de condiție

$$d(n - k) = \mathbf{w}^H(n + 1)x(n - k), \quad k = 0, \dots, M - 1$$

$$\mathbf{d}(n) = \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n + 1)$$

Funcția cost

$$J(n) = \|\mathbf{w}(n + 1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \sum_{k=0}^{M-1} \operatorname{Re}\{\lambda_k^* [d(n - k) - \mathbf{w}^H(n + 1)x(n - k)]\}$$

$$J(n) = \|\mathbf{w}(n + 1) - \mathbf{w}(n)\|^2 + \operatorname{Re}\{(\mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n + 1))^H \boldsymbol{\lambda}\}$$

Minimizarea unei funcții reale de variabilă complexă

Teoremă

O funcție $f(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*): \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ are direcția de variație maximă dată de gradientul complex $\nabla_{\mathbf{z}^*}\{f(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)\}$.

$$\nabla_{\mathbf{z}} J = \left[\frac{\partial J}{\partial z_0}, \frac{\partial J}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial z_{N-1}} \right]^T$$

$$\frac{\partial J}{\partial z_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial a_i} - j \frac{\partial J}{\partial b_i} \right), \quad \frac{\partial J}{\partial z_i^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial a_i} + j \frac{\partial J}{\partial b_i} \right), \quad z_i = a_i + b_i$$

$$\nabla_{\mathbf{z}}\{\mathbf{a}^H \mathbf{z}\} = \mathbf{a}^*$$

$$\nabla_{\mathbf{z}^*}\{\mathbf{a}^H \mathbf{z}\} = \mathbf{0}$$

$$\nabla_{\mathbf{z}}\{\mathbf{z}^H \mathbf{a}\} = \mathbf{0}$$

$$\nabla_{\mathbf{z}^*}\{\mathbf{z}^H \mathbf{a}\} = \mathbf{a}$$

$$\nabla_{\mathbf{z}}\{\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}\} = (\mathbf{A} \mathbf{z})^*$$

$$\nabla_{\mathbf{z}^*}\{\mathbf{z}^H \mathbf{A} \mathbf{z}\} = (\mathbf{A} \mathbf{z})$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Minimizarea funcției cost

Va trebui deci să anulăm gradientul complex al funcției cost calculat în raport cu setul de coeficienți $\mathbf{w}^*(n+1)$. Componentele acestuia sunt

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)}\{\|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2\} = \nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)}\{(\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n))^H(\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n))\}$$

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)}\{\|\mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)\|^2\} = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n)$$

deoarece

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)}\{\mathbf{w}^H(n+1)\mathbf{w}(n+1)\} = \mathbf{w}(n+1)$$

iar

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)}\{\mathbf{w}^H(n+1)\mathbf{w}(n) + \mathbf{w}^H(n)\mathbf{w}(n+1)\} = \mathbf{w}(n)$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n+1))^H \boldsymbol{\lambda} \right\} \right\} \\ = \nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n+1))^H \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n+1)) \right\} \right\} \end{aligned}$$

care conduce la

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ (\mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n+1))^H \boldsymbol{\lambda} \right\} \right\} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}^H(n) \boldsymbol{\lambda}$$

În consecință,

$$\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)} \{J(n)\} = \mathbf{w}(n+1) - \mathbf{w}(n) - \frac{1}{2} \mathbf{A}^H(n) \boldsymbol{\lambda}$$

și condiția $\nabla_{\mathbf{w}^*(n+1)} \{J(n)\} = \mathbf{0}$ conduce la

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \frac{1}{2} \mathbf{A}^H(n) \boldsymbol{\lambda}$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

$$\mathbf{w}(n + 1) = \mathbf{w}(n) + \frac{1}{2} \mathbf{A}^H(n) \lambda$$

Determinarea lui λ

λ urmează a fi determinat din setul de condiții $\mathbf{d}(n) = \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n + 1)$.

Pentru aceasta, se înmulțește relația precedentă la stânga cu $\mathbf{A}(n)$ și rezultă

$$\mathbf{d}(n) = \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n) + \frac{1}{2} \mathbf{A}(n)\mathbf{A}^H(n)\lambda$$

Introducând vectorul erorilor

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n)$$

rezultă

$$\lambda = 2 \left(\mathbf{A}(n)\mathbf{A}^H(n) \right)^{-1} \mathbf{e}(n)$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Relația de reactualizare a coeficienților

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \bar{\mu} \mathbf{A}^H(n) \left(\mathbf{A}(n) \mathbf{A}^H(n) \right)^{-1} \mathbf{e}(n)$$

unde, ca și în cazul algoritmului NLMS a mai fost introdus coeficientul de ponderare $\bar{\mu}$.

Înlocuind vectorul $\mathbf{e}(n)$ în relația de mai sus, rezultă

$$\mathbf{w}(n+1) = \left[\mathbf{I} - \bar{\mu} \mathbf{A}^H(n) \left(\mathbf{A}(n) \mathbf{A}^H(n) \right)^{-1} \mathbf{A}(n) \right] \mathbf{w}(n) + \bar{\mu} \mathbf{A}^H(n) \left(\mathbf{A}(n) \mathbf{A}^H(n) \right)^{-1} \mathbf{d}(n)$$

Matricea

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^H(n) \left(\mathbf{A}(n) \mathbf{A}^H(n) \right)^{-1}$$

este **pseudoinversa matricei $\mathbf{A}(n)$** , iar

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^H(n) \left(\mathbf{A}(n) \mathbf{A}^H(n) \right)^{-1} \mathbf{A}(n)$$

este **matricea de proiecție** pe spațiul definit de vectorii coloană ai matricei $\mathbf{A}(n)$.

În consecință relația de reactualizare a coeficienților se mai poate scrie ($n+1$)

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \bar{\mu} \mathbf{A}^+(n) \mathbf{e}(n)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \bar{\mu} \mathbf{A}^+(n) \mathbf{e}(n)$$

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Regularizare

Ca și în cazul algoritmului NLMS, există riscul ca matricea $\mathbf{A}(n)$ să devină nulă (dacă datele de la intrare sunt nule), și matricea $(\mathbf{A}(n)\mathbf{A}^H(n))$ să devină neinvertibilă. Pentru a evita o asemenea situație, se introduce și aici un termen de regularizare, așa încât formula de reactualizare a coeficienților devine

$$\mathbf{w}(n + 1) = \mathbf{w}(n) + \bar{\mu}\mathbf{A}^H(n)[\mathbf{A}(n)\mathbf{A}^H(n) + \delta\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{e}(n)$$

unde δ este o constantă mică pozitivă.

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

```

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$$

$$\text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y(n) = \mathbf{w}^H(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\mathbf{e}(n) = \mathbf{d}(n) - \mathbf{A}(n)\mathbf{w}(n)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \bar{\mu}\mathbf{A}^H(n)[\mathbf{A}(n)\mathbf{A}^H(n) + \delta\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{e}(n)$$

$$\text{end}$$

```

ALGORITMUL PROIECȚIEI AFINE (APA)

Observații

- Algoritmul NLMS poate fi privit ca un caz particular al algoritmului APA, pentru $M = 1$.
- O analiză a convergenței conduce la faptul că stabilitatea algoritmului necesită ca pasul să fie ales la fel ca la algoritmul NLMS, $\mu \in (0,2)$.
- Viteza de convergență este mai mare ca în cazul NLMS și crește cu numărul M , dar creșterea scade pe măsură ce crește M .
- Complexitatea aritmetică, în mod evident va fi mai ridicată decât la NLMS.
- Pentru $N \gg M$, acesta este aproximativ proporțională cu NM .