

**Problema estimării frecvențelor unor semnale
sinusoidale în prezența zgomotului**

A. Estimarea pe baza subspațiului semnal (metoda componentei principale)

Se pornește de la reținerea numai a informației conținute în subspațiul semnalelor, prin utilizarea unei aproximări a matricei de autocorelație

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sum_{i=P+1}^N \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

obținută reținând numai

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^P \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H$$

Această idee poate fi aplicată în cazul tuturor metodelor care necesită matricea de autocorelație

B. *Estimarea pe baza subspațiului zgomot. Metoda Pisarenko*

În acest caz se are în vedere utilizarea relației de ortogonalitate

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{g}_k = 0, \quad \forall i, k, \quad i = 1, \dots, P, \quad k = 1, \dots, N - P$$

O primă metodă bazată pe acest principiu este aceea propusă de *Pisarenko*. În acest caz se ia $N=P+1$ și se determină valorile proprii ale matricei de autocorelație $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$. Cea mai mică dintre valorile proprii, λ_N și vectorul propriu asociat vor corespunde spațiului zgomot și deci

$$\mathbf{e}_i^H \mathbf{v}_N = 0, \quad i = 1, \dots, P.$$

Se definește *pseudospectrul Pisarenko* prin

$$P_P(e^{j\omega}) = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{v}_N}, \quad \mathbf{e}(\omega) = [1, e^{-j\omega}, \dots, e^{-j(N-1)\omega}]^T$$

Frecvențele ω_i vor putea fi deci deduse ca frecvențe la care acesta își atinge maximele (teoretic infinite).

Dacă se dorește un calcul analitic, se observă că $z_i = e^{j\omega_i}$

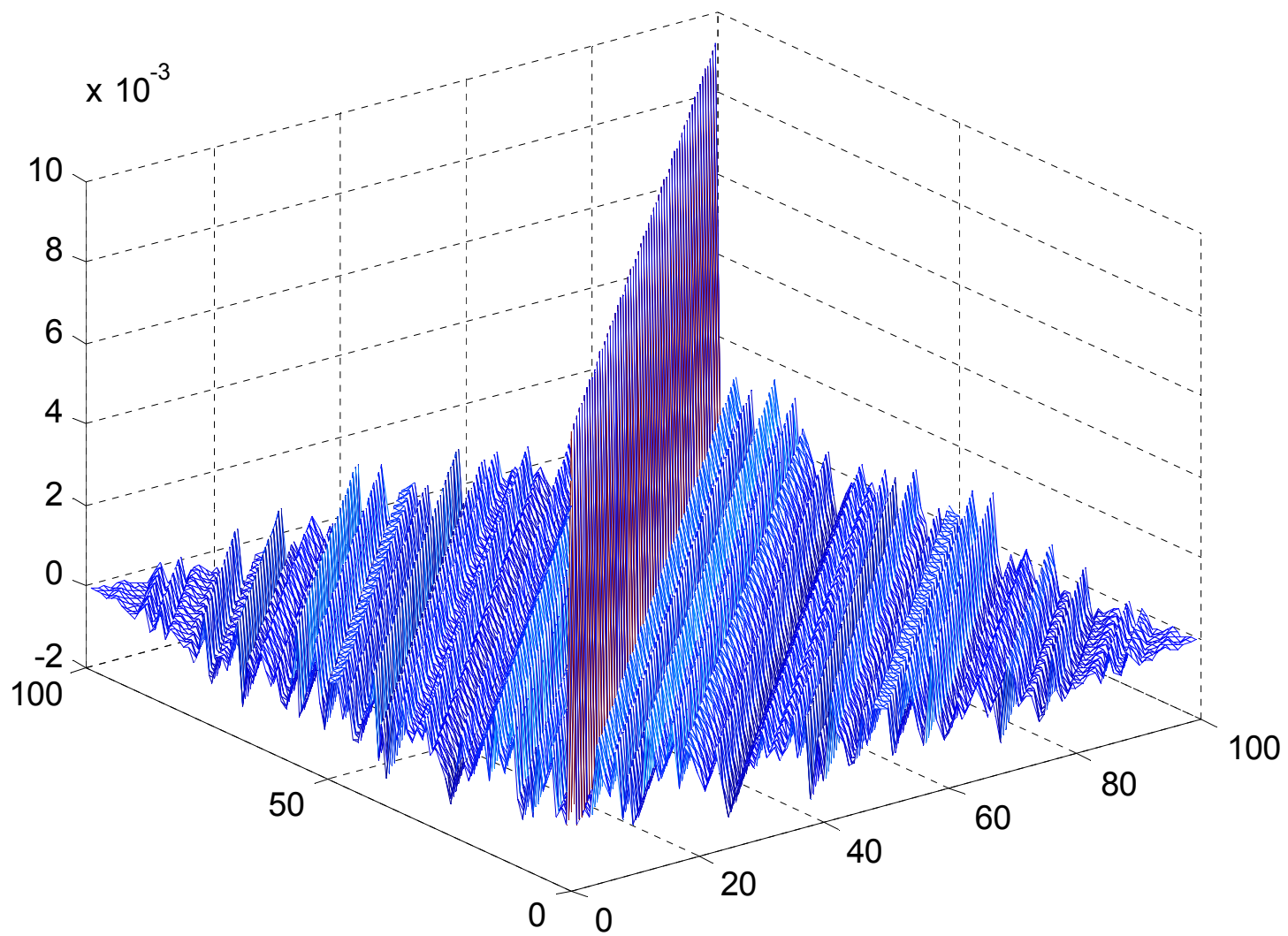
sunt rădăcini ale polinomului

$$A(z) = \sum_{k=0}^P a_k z^{-k}, \quad a_k = v_{N,k}, \quad k = 0, \dots, P$$

Exemplu

Fie un semnal sinusoidal cu amplitudinea $A=10$ și frecvența normalată 0,2, suprapus peste un zgomot alb, cu varianța 0,01.

Se calculează mai întâi estimatul funcției de autocorelație. Pentru o estimare bună este util să se ia un număr cât mai mare de eșantioane.



Estimatul matricei de autocorelație pentru zgomot alb, $N=100$

Se va lucra deci cu $N=P+1=3$.

Se calculează matricea vectorilor proprii și valorile proprii (procedura *eig*).

$V =$

0.6481 0.2828 -0.7071

-0.3999 0.9166 -0.0000

0.6481 0.2828 0.7071

$\Lambda =$

0.9425 0 0

0 59.8100 0

0 0 90.4390

Evident, cea mai mică valoare proprie este λ_1 . Vectorul propriu asociat este

$\mathbf{v} =$

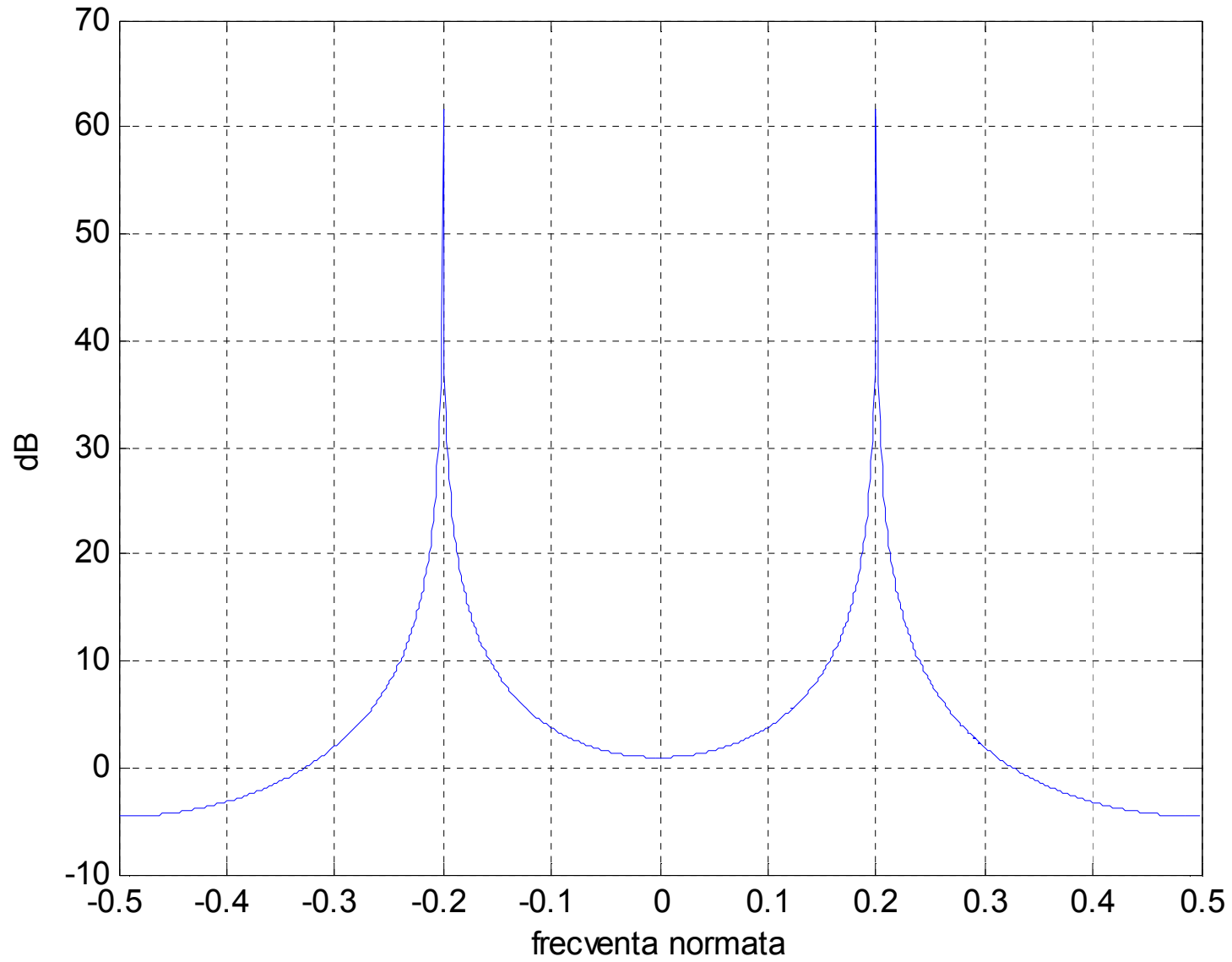
0.6481

-0.3999

0.6481

Cu acesta se construiește pseudospectrul. S-a utilizat scară logaritmică, în dB.

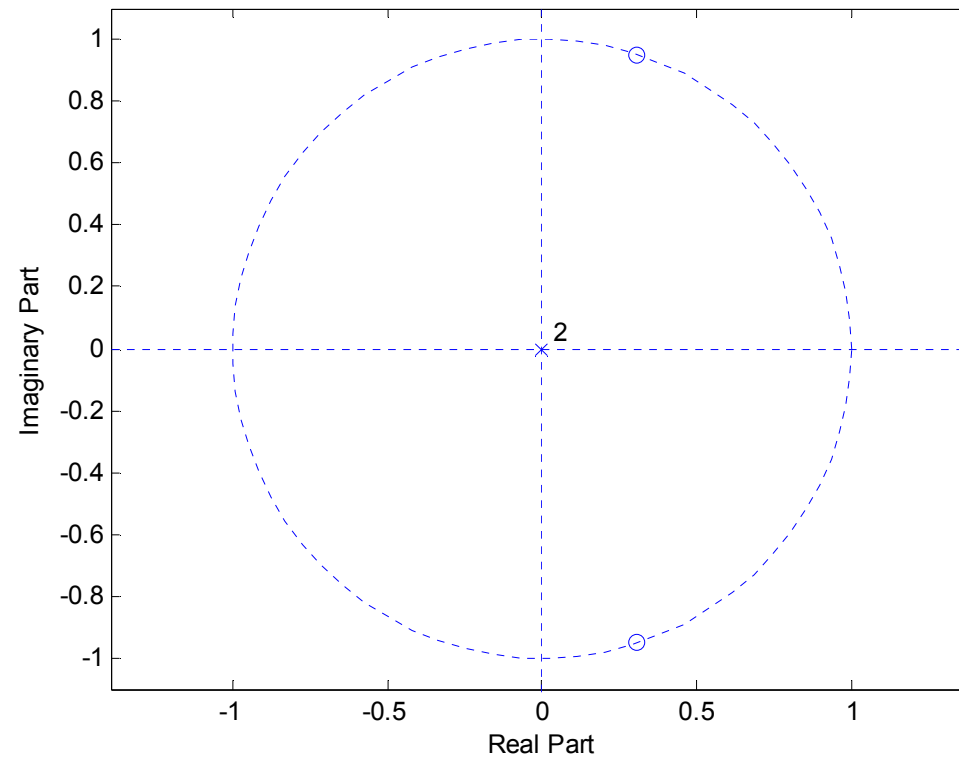
Pseudospectru Pisarenko



Se pot calcula frecvențele, formând polinomul

$$P(z) = 0.6481 - 0.3999z^{-1} + 0.6481z^{-2}$$

Acesta are două zerouri pe cercul unitar, ale căror argumente sunt $\arg(z_i) = \pm 2\pi \cdot 0,2$



B. Estimarea pe baza subspațiului zgomot. Metoda MUSIC

Metoda MUSIC (**M**Ultiple **S**ignal **C**lassification) poate fi privită ca o extindere a metodei Pisarenko. Vom porni de la ideea că

$$\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \text{pentru } \omega = \omega_i, \quad i = 1, \dots, P$$

sau

$$\|\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{G}\|^2 = \mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{e}(\omega) = 0 \quad \text{pentru } \omega = \omega_i, \quad i = 1, \dots, P$$

Lucrând cu valorile estimate în locul celor reale, norma de mai sus nu va mai fi zero, dar va prezenta minime pronunțate.

Se definește estimatorul *pseudospectru MUSIC* prin:

$$\hat{P}_{MUSIC}(e^{j\omega}) = \frac{1}{\|\mathbf{e}^H(\omega)\hat{\mathbf{G}}\|^2} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega)\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{G}}^H\mathbf{e}(\omega)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-P} |\mathbf{e}^H\hat{\mathbf{g}}_i|^2}$$

Dacă s-ar lucra cu valorile exacte (fără estimări), pentru

oricare din frecvențele ω_k , $k=1,..P$

$$P_{MUSIC}(\omega) \rightarrow \infty \text{ pentru } \omega = \omega_k, k = 1, \dots, P.$$

În realitate, din cauza erorilor de estimare, valorile estimatorului sunt finite, dar cu niște maxime foarte pronunțate la frecvențele ω_k .

O primă posibilitatea de a găsi frecvențele ω_k va consta deci în căutarea maximelor pseudospectrului.

Există însă și o posibilitate de calcul analitic (metoda *Root-MUSIC*)

Dacă se introduc polinoamele

$$G_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z^{-1} + \dots + g_{i,N-1}z^{-(N-1)}, \quad i = 1, \dots, P$$

unde

$$\mathbf{g}_i^T = [g_{i,0}, g_{i,1}, \dots, g_{i,N-1}]$$

rezultă

$$\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{g}_i = G_i(e^{j\omega}), \quad \|\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{g}_i\|^2 = G_i(z)G_i^*(1/z^*) \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\|\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{g}_i\|^2 = G_i(z)G_i^*(1/z^*)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$\hat{P}_{MUSIC}(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-P} \hat{G}_i(z)\hat{G}_i^*(1/z^*)}\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{D(z)D^*(1/z^*)}\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Nulurile lui $D(z)$ sunt poli ai estimatorului. Sunt în total $N-1$ nuluri, din care P sunt cele căutate, care ar trebui să se afle exact pe cercul de rază unitate. Celelalte nu se află pe acest cerc și vor fi eliminate. În măsura în care ele se apropie de cerc, pot fi confundate cu rădăcini utile.

Observații

- În toate aceste metode este esențială identificarea corectă a celor două categorii de vectori proprii. Dacă ordinul P este cunoscut, lucrul acesta se poate face relativ ușor, spațiul semnalelor fiind caracterizat prin vectorii proprii corespunzători valorilor proprii cele mai mari, în număr de P . Celelalte valori proprii vor fi mai mici și aproximativ egale între ele. Această observație poate fi utilizată atunci când P nu este cunoscut. Separarea devine cu atât mai dificilă cu cât raportul semnal/zgomot este mai mic.
- Metoda presupune calculul matricei de autocorelație, deci calculul unui estimat al funcției de autocorelație, pe un număr L de eșantioane.

Exemplu

Vom lua același caz ca mai înainte.

Alegem $N=5$. Calculăm vectorii și valorile proprii cu procedura *eig*, care face implicit și ordonarea după valorile proprii, dar în sens crescător.

$v =$

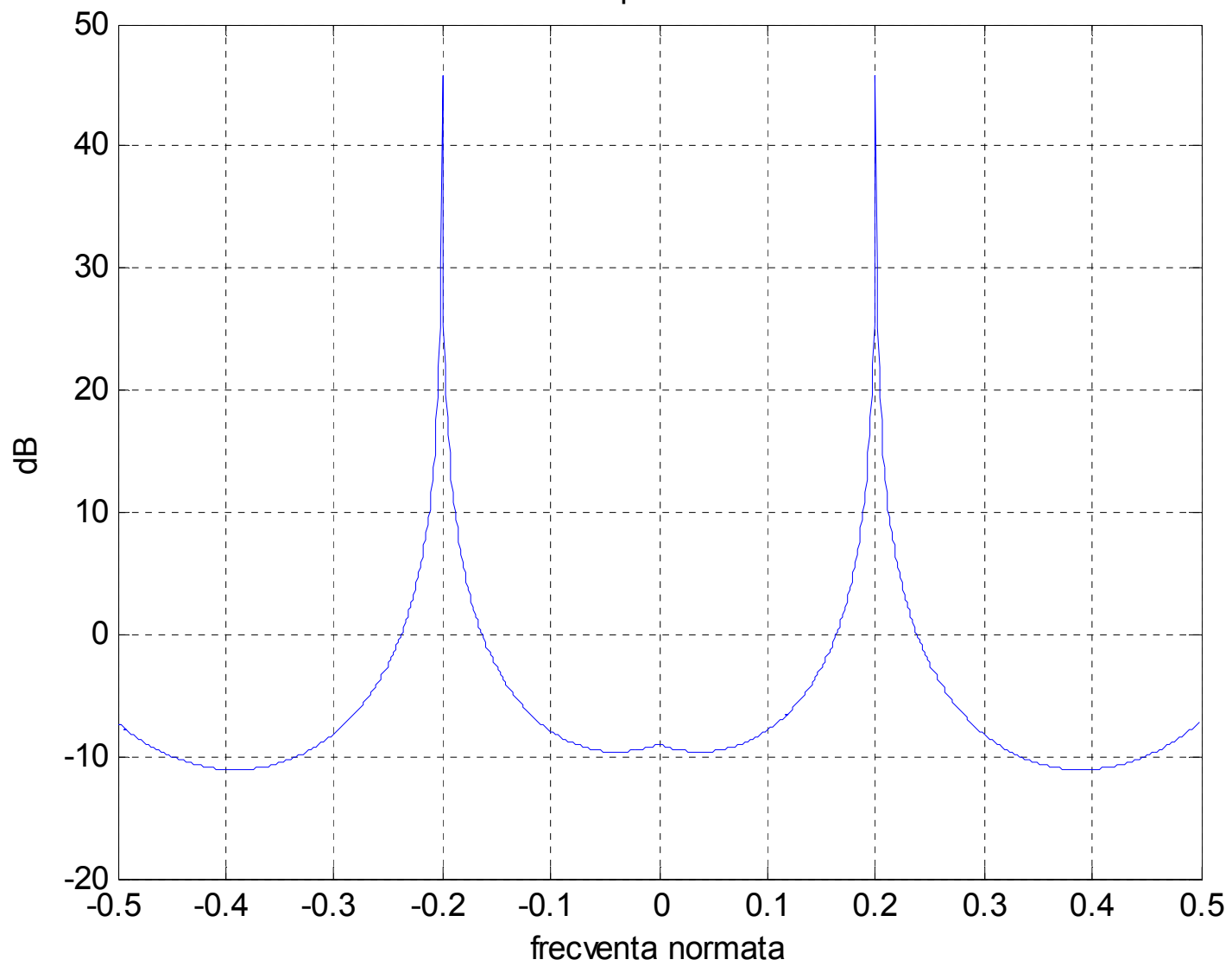
0.3261	0.3634	-0.6022	-0.3707	0.5114
-0.3480	0.5844	0.3707	-0.6022	-0.1934
0.7383	0.2299	-0.0000	0.0000	-0.6341
-0.3480	0.5844	-0.3707	0.6022	-0.1934
0.3261	0.3634	0.6022	0.3707	0.5114

$\Lambda =$

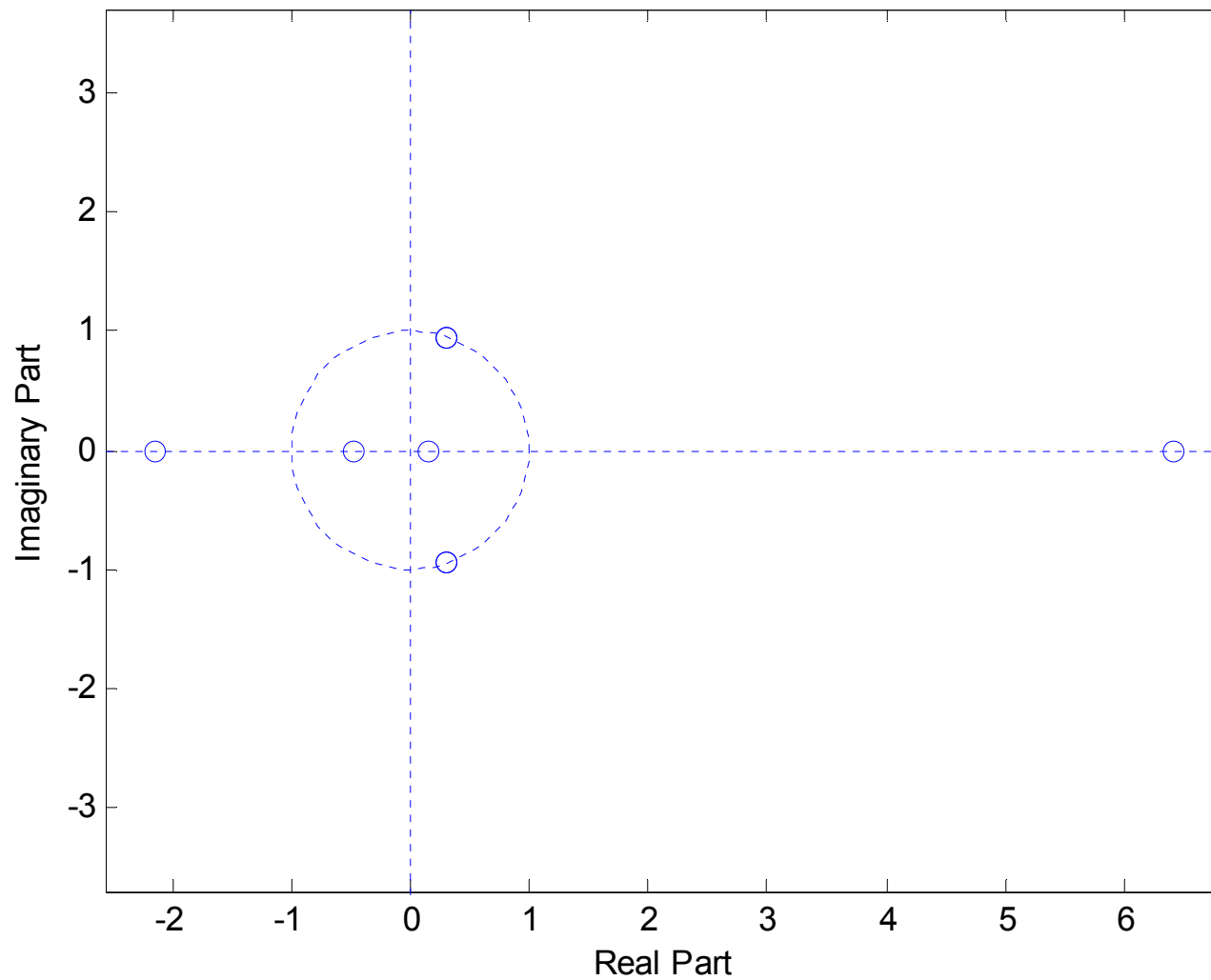
0.6358	0	0	0	0
0	1.3127	0	0	0
0	0	1.6182	0	0
0	0	0	124.5163	0
0	0	0	0	124.7127

Evident, valorile proprii principale sunt ultimele două.

Pseudospectru MUSIC



Zerourile de pe cercul unitar determină frecvențele căutate.



Metoda ESPRIT

Fie matricele de tip $(N - 1) \times P$

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{I}_{N-1} \quad \mathbf{0}] \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}_2 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{N-1}] \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{e}_1(n), \mathbf{e}_2(n), \dots, \mathbf{e}_P(n)]$$

Se poate verifica ușor că

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \mathbf{D}$$

unde

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left\{ e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}, \dots, e^{-j\omega_P} \right\}$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}, \dots, e^{-j\omega_P}\}$$

\mathbf{D} este o matrice unitară, așa încât transformarea de mai sus este o rotație,
de aici venind denumirea metodei

(Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques).

La fel, definim

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{I}_{N-1} \quad \mathbf{0}] \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}_2 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{N-1}] \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_P] \quad (N \times P)$$

$$\mathbf{RS} = \mathbf{S}\Lambda_1 = \mathbf{S}(\Lambda_S + \sigma_w^2 \mathbf{I}) = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H \mathbf{S} + \sigma_w^2 \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S}\Lambda_S = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H \mathbf{S}$$

unde

$$\Lambda_S = \text{diag}\{\lambda_{S1}, \dots, \lambda_{SP}\}$$

deci

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{C}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{A}^H \mathbf{S}\Lambda_S^{-1}$$

\mathbf{C} este nesingulară, deoarece \mathbf{A} și \mathbf{S} sunt de rang maxim, iar

\mathbf{P} și Λ_S sunt diagonale, cu elemente nenule pe diagonală.

$$\mathbf{S}_1 = [\mathbf{I}_{N-1} \quad \mathbf{0}] \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{A}_1 \mathbf{C}$$

$$\mathbf{S}_2 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_{N-1}] \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{A}_2 \mathbf{C}$$

sau

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{C} = \mathbf{A}_1 \mathbf{D} \mathbf{C} = \mathbf{S}_1 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C} = \mathbf{S}_1 \mathbf{\Phi}$$

unde

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{C}$$

Observații

- Φ și \mathbf{D} au aceleași valori proprii, $\lambda_{Di} = e^{-j\omega_i}$, $i = 1, \dots, P$;
- Datorită structurii Vandermonde a matricei \mathbf{A} , matricele \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 au rangul N și deci de aceeași proprietate se bucură \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , așa încât Φ se poate calcula cu ajutorul pseudoinversei

$$\Phi = \left(\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1 \right)^{-1} \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2$$

Algorimul ESPRIT

- se estimează matricea $\hat{\mathbf{R}}$;
- se deduce matricea $\hat{\mathbf{S}}$;
- din aceasta se deduc $\hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2$;
- se calculează $\hat{\mathbf{\Phi}} = \left(\hat{\mathbf{S}}_1^H \hat{\mathbf{S}}_1\right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}_1^H \hat{\mathbf{S}}_2$;
- se calculează valorile proprii $\hat{\lambda}_{\Phi_i}, i = 1, \dots, P$;
- se calculează frecvențele $\hat{\omega}_i = -\arg\{\hat{\lambda}_{\Phi_i}\}, i = 1, \dots, P$

Metoda Capon

Se pornește de la ideea utilizării unui filtru trece bandă, de bandă cât mai îngustă, centrat pe frecvența ω . Acesta va selecta deci din spectrul semnalului componenta respectivă. Variind această frecvență se pot găsi componentele spectrale ale semnalului. Fie funcția pondere

$$\mathbf{h}^H = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]$$

Intrarea filtrului este deci

$$y(n) = \sum_{i=1}^P A_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega_i n} + w(n)$$

iar ieșirea este

$$y_F(n) = \mathbf{h}^H \mathbf{y}_N(n), \quad \mathbf{y}_N(n) = [y(n), \dots, y(n - N + 1)]$$

Vom pune două condiții:

- Filtrul să aibă câștig unitar la frecvența ω :

$$\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) = 1$$

- Puterea semnalului la ieșire să fie minimă. Aceasta presupune minimizarea cantității

$$E\{|y_F(n)|^2\} = E\{y_F(n)y_F^*(n)\} = E\{\mathbf{h}^H \mathbf{y}_N(n) \mathbf{y}_N^H(n) \mathbf{h}\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h}$$

Problema se reduce deci la găsirea coeficienților \mathbf{h} care satisfac

$$\min_{\mathbf{h}} \left\{ \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h} \right\} \quad \text{cu condiția } \mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) = 1$$

Pentru rezolvarea problemei de extrem condiționat se utilizează

metoda multiplicatorilor Lagrange, conducând la minimizarea expresiei reale

$$L(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda \left(\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) - 1 \right) \right\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h} + \lambda \left(\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) - 1 \right) + \lambda^* \left(\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{h} - 1 \right)$$

$$L(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \lambda \left(\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) - 1 \right) \right\} = \mathbf{h}^H \mathbf{R} \mathbf{h} + \lambda \left(\mathbf{h}^H \mathbf{e}(\omega) - 1 \right) + \lambda^* \left(\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{h} - 1 \right)$$

Punând condiția

$$\nabla_{\mathbf{h}^*} L(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \mathbf{h} + \lambda \mathbf{e}(\omega) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h} = -\lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)$$

λ se determină din condiția de câștig unitar la frecvența ω :

$$\lambda = -\frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}$$

Rezultă

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}{\mathbf{e}^H(\omega) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}$$

Puterea semnalului la ieșire este

$$E\left\{|y_F(n)|^2\right\} = \frac{1}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

În cazul zgomotului alb,

$$\mathbf{R} = \sigma^2\mathbf{I}, \quad E\left\{|y_F(n)|^2\right\} = \frac{\sigma^2}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{e}(\omega)} = \frac{\sigma^2}{N}$$

Relația aceasta sugerează că se poate obține un estimator pentru densitatea spectrală de putere prin înmulțire cu N :

$$P_{MV}(\omega) = \frac{N}{\mathbf{e}^H(\omega)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{e}(\omega)}$$

În realitate se lucrează cu estimatori ai corelației, așa încât estimatorul de varianță minimă al densității spectrale de putere devine

$$\hat{P}_{MV}(\omega) = \frac{N}{\mathbf{e}^H(\omega) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{e}(\omega)}$$

În cazul zgomotului alb, funcția de pondere devine

$$\mathbf{h} = \frac{1}{N} \mathbf{e}(n); \quad h_k = \frac{1}{N} e^{-jk\omega}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

și

$$y_F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(n-k) e^{-jk\omega}$$