

# RAPORT ȘTIINȚIFIC FINAL

## PROIECT PN-III-P4-PCE-2021-0438

### Noi algoritmi adaptivi cu proprietăți de raritate pentru aplicații acustice (NARALAN)

#### 1 Obiective realizate

Un prim obiectiv al acestui proiect a vizat dezvoltarea unei familii de algoritmi optimizați de tip LMS (*least-mean-square*) și APA (*affine projection algorithm*), în ceea ce privește controlul mărimii pasului de adaptare, în contextul identificării sistemelor acustice. Punctul de plecare l-a reprezentat modificarea termenului de actualizare a algoritmului LMS, prin înmulțirea acestuia cu o matrice diagonală care conține factorii de “control” individual (*individual control factors* - ICF). În abordarea respectivă, am determinat acești factori de control pe baza unui criteriu de optimizare specific, care urmărește minimizarea dezalinierii sistemului. Astfel, a rezultat un algoritm LMS optimizat cu factori de control individual (ICF). De asemenea, ca o generalizare a algoritmului LMS, ne-am concentrat pe algoritmul proiecțiilor afine (APA), care oferă caracteristici de convergență îmbunătățite, în special pentru intrări foarte corelate (cum ar fi semnalul vocal/audio). Scopul principal a fost de a extinde ideile din spatele algoritmului LMS cu ICF la APA. În acest context, principala provocare o reprezintă faptul că semnalul de intrare în cazul APA apare sub formă de matrice, ridicând astfel dificultăți suplimentare în ceea ce privește problema de optimizare menționată anterior, precum și o complexitate de calcul crescută. Algoritmul rezultat de tip APA cu ICF (denumit JO-APA - *joint-optimized APA*), depășește însă performanțele algoritmului de tip LMS, în special în ceea ce privește viteza de convergență/urmărire, atunci când se utilizează semnale de intrare corelate.

Algoritmul recursiv al celor mai mici pătrate (*recursive least-squares* - RLS) este binecunoscut pentru viteza sa de convergență rapidă, care este însă plătită de o complexitate de calcul ridicată, mai ales pentru filtre adaptive de lungime mare. Un al doilea obiectiv de cercetare a vizat proiectarea unui filtru adaptiv bazat pe RLS tensorial (denumit RLS-TOT), care “modelează” răspunsul la impuls al sistemului pe baza descompunerii unui tensor de ordinul trei. Astfel, RLS-TOT combină estimările furnizate de trei filtre adaptive de lungime redusă, fiind adecvat pentru identificarea răspunsurilor la impuls de lungă durată (cum sunt cele acustice). Câștigul de performanță este semnificativ, în ceea ce privește viteza de convergență/capacitatea de urmărire și acuratețea soluției, având în același timp o complexitate redusă.

Deoarece în multe aplicații legate de mediul acustic este nevoie de algoritmi adaptivi multicanal, cel de al treilea obiectiv a fost dedicat dezvoltării acestor versiuni. Câștigul este semnificativ mai ales atunci când se utilizează algoritmi bazați pe descompunere, datorită complexității lor scăzute. Evaluarea performanțelor s-a realizat în contextul unui scenariu de compensare a ecoului acustic stereofonic (*stereophonic acoustic echo cancellation* - SAEC), ținând cont de corelația dintre intrări. În sistemele de teleconferință, transmisia stereo oferă “teleprezență” datorită sistemului nostru auditiv binaural și oferă o prezență realistă pe care sistemele audio cu un singur canal nu o pot oferi. În acest context, anularea ecoului acustic stereofonic este necesară pentru o comunicație de calitate. Cu toate acestea, lungimea mare a răspunsurilor la impuls acustice reprezintă una dintre principalele provocări în SAEC, cu un impact semnificativ asupra performanței generale a filtrelor adaptive utilizate pentru modelarea căilor de ecou acustic. În acest context, am propus o nouă abordare bazată pe descompunerea NKP (*nearest Kronecker product*), ce are la bază o combinație de filtre mai scurte pentru a rezolva problema de identificare a sistemului de mari dimensiuni. Soluția este foarte atractivă în special în contextul algoritmului RLS, ținând cont de caracteristicile sale de convergență. Pe lângă complexitatea aritmetică redusă, algoritmul RLS bazat pe descompunere NKP obține un comportament de urmărire mai bun în comparație cu omologul său convențional.

Prin urmare, în cadrul acestui proiect de cercetare **au fost îndeplinite toate obiectivele prevăzute** în etapele planului de realizare a proiectului, după cum urmează:

1. Dezvoltarea algoritmilor de tip LMS/APA optimizat cu factori de control individual. [2022]
2. Dezvoltarea algoritmilor de tip RLS optimizat cu factori de control individual și a variantelor bazate pe descompunere tensorială. [2023]
3. Dezvoltarea algoritmilor multicanal cu proprietăți de raritate. [2024]

În această secțiune sunt furnizați indicatorii de rezultat realizați, ca urmare a îndeplinirii obiectivelor. Raportarea acestora se regăsește și pe site-ul proiectului (<http://www.comm.pub.ro/naralan>).

## 2 Indicatori de rezultat realizați

În planul de realizare a proiectului, rezultatele estimative au prevăzut publicarea a 4 lucrări în reviste cotate ISI Q1/Q2 și a 12 lucrări la conferințe. Acești indicatori au fost îndepliniți.

Astfel, rezultatele din cadrul acestui proiect de cercetare au fost diseminate prin publicarea a **7 articole în reviste cotate ISI Q1/Q2** (*IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, Language Processing* [1, 6], *IEEE Signal Processing Letters* [3], *Signal Processing* (Elsevier) [5], *Applied Sciences* [2, 7], *Symmetry* [4]) și a **18 articole la conferințe** [8]–[25]. Acestea se regăsesc în lista de referințe bibliografice de la finalul acestui raport. Lucrările [12, 22, 23, 24] au fost premiate (“*Best Paper Award*”) la conferințele respective.

Principalele rezultate științifice obținute sunt rezumate în următoarea secțiune a acestui raport științific. De asemenea, în secțiunea finală este prezentat impactul estimat al rezultatelor obținute (cu sublinierea celui mai semnificativ rezultat obținut).

## 3 Prezentarea rezultatelor obținute

### 3.1 Noi algoritmi adaptivi de tip LMS/APA

Algoritmul LMS și variantele acestuia [cum ar fi LMS normalizat (NLMS) și APA] sunt frecvent utilizate pentru problemele de identificare a sistemelor [26]. Parametrul principal care controlează comportamentul acestor algoritmi este pasul de adaptare. În acest context, algoritmi cu pas variabil (*variable step-size* - VSS) au fost proiectați pentru a obține un compromis adecvat între viteza de convergență rapidă și dezadaptarea/dezalinierea scăzută [27]–[30].

În cadrul problemelor de identificare a sistemelor acustice abordate, criteriu de optimizare ce va fi aplicat este minimizarea dezalinierei sistemului. Cu toate acestea, majoritatea algoritmilor VSS au fost dezvoltați presupunând că sistemul necunoscut este invariant în timp, ceea ce este rareori cazul în aplicațiile practice (în special cele din domeniul acustic). În consecință, acești algoritmi de tip VSS ar putea necesita unii parametri suplimentari sau dispozitive suplimentare pentru a le putea controla comportamentul, cum ar fi detectoarele de schimbare a sistemului (schimbare de cale), care sunt dificil de gestionat în practică.

În continuare, vom prezenta o familie de noi algoritmi optimizați de tip LMS, care acționează ca filtre adaptive VSS. În primul rând, considerăm că sistemul necunoscut este variabil în timp (pe baza unui model Markov de ordinul întâi) și urmărim minimizarea dezalinierei sistemului în acest context. În al doilea rând, extindem abordarea la cazul mai general al unui algoritm LMS cu factori de control individuali (*individual control factors* - ICF), care este oarecum similar cu ideea din spatele filtrelor adaptive rare (“*sparse*”) [31]. Experimentele efectuate în contextul compensării ecoului acustic (care reprezintă o problemă dificilă și complexă de identificare a sistemelor) indică comportamentul foarte bun al acestor algoritmi.

Astfel, vom considera o problemă de identificare adaptivă a sistemelor, în care utilizăm un filtru adaptiv pentru a modela un sistem necunoscut, ambele având la intrare același semnal de medie nulă,  $x(n)$ . În acest context, semnalul dorit la momentul de timp  $n$  este

$$d(n) = \mathbf{h}^T(n)\mathbf{x}(n) + v(n), \quad (1)$$

unde  $\mathbf{h}(n) = [h_0(n) \ h_1(n) \ \dots \ h_{L-1}(n)]^T$  este răspunsul la impuls (de lungime  $L$ ) al sistemului necunoscut, indicele superior  $T$  reprezintă operatorul de transpunere,  $\mathbf{x}(n) =$

$[x(n) \ x(n-1) \ \cdots \ x(n-L+1)]^T$  este un vector coloană ce conține cele mai recente  $L$  eșantioane ale semnalului de intrare și  $v(n)$  reprezintă un zgomot aditiv de medie nulă, considerat ca fiind alb și gaussian. În cele ce urmează  $\mathbf{h}(n)$  este dat de un model Markov simplificat de ordinul unu:

$$\mathbf{h}(n) = \mathbf{h}(n-1) + \mathbf{w}(n), \quad (2)$$

unde vectorul  $\mathbf{w}(n)$  este un zgomot alb gaussian, necorelat cu  $\mathbf{h}(n-1)$ . Matricea de corelație a lui  $\mathbf{w}(n)$  este  $\mathbf{R}_w = \sigma_w^2 \mathbf{I}_L$ , unde  $\mathbf{I}_L$  este matricea identitate de dimensiune  $L \times L$ , iar varianța  $\sigma_w^2$  este legată de “incertitudinile” sistemului  $\mathbf{h}(n)$ . Acest model este valid pentru numeroase probleme de identificare a sistemelor, dar în special pentru compensarea ecoului acustic, deoarece căile de ecou acustic sunt sisteme variabile în timp [32].

Obiectivul principal este de a estima  $\mathbf{h}(n)$  cu un filtru adaptiv, definit prin  $\hat{\mathbf{h}}(n) = [\hat{h}_0(n) \ \hat{h}_1(n) \ \cdots \ \hat{h}_{L-1}(n)]^T$ . Se poate observa că ecuațiile (1) și (2) definesc un model de stare variabil, similar cu contextul filtrării Kalman [33].

Algoritmul LMS clasic [26] este definit de relația de reactualizare:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu \mathbf{x}(n)e(n), \quad (3)$$

unde  $\mu$  este pasul de adaptare și

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{h}}^T(n-1)\mathbf{x}(n) \quad (4)$$

este semnalul de eroare al filtrului adaptiv. De asemenea, se poate defini dezalinierea a posteriori ca fiind  $\mathbf{c}(n) = \mathbf{h}(n) - \hat{\mathbf{h}}(n)$ , astfel încât, dezvoltând (3), relația de reactualizare rezultă ca

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{c}(n-1) + \mathbf{w}(n) - \mu \mathbf{x}(n)e(n). \quad (5)$$

De asemenea, pe baza (1) și (2), semnalul de eroare din (4) poate fi scris ca

$$e(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n-1) + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n) + v(n). \quad (6)$$

Deoarece avem de a face cu o problemă de identificare de sistem, un criteriu de optimizare valid îl reprezintă minimizarea dezalinierei sistemului. Prin urmare, considerând norma  $\ell_2$  în (5), apoi aplicând operatorul de mediere statistică în ambii termeni, se obține

$$\begin{aligned} E[\|\mathbf{c}(n)\|_2^2] &= E[\|\mathbf{c}(n-1)\|_2^2] + L\sigma_w^2 \\ &\quad - 2\mu E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n-1)e(n)] - 2\mu E[\mathbf{x}^T(n)\mathbf{w}(n)e(n)] + \mu^2 E[e^2(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]. \end{aligned} \quad (7)$$

În continuare, ținând cont de (6), presupunând că semnalul de intrare este un proces gaussian de medie nulă cu varianța  $\sigma_x^2$  și eliminând produsele necorelate, primul termen de corelație din linia a doua a relației (7) devine

$$E[\mathbf{c}^T(n-1)\mathbf{x}(n)e(n)] \approx \text{tr}\{E[\mathbf{c}(n-1)\mathbf{c}^T(n-1)] E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\} = \sigma_x^2 E[\|\mathbf{c}(n-1)\|_2^2], \quad (8)$$

unde  $\text{tr}\{\cdot\}$  reprezintă urma unei matrice. În mod similar, ultimul termen de corelație din linia a doua a relației (7) poate fi dezvoltat ca

$$E[\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)e(n)] \approx \text{tr}\{E[\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^T(n)] E[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\} = L\sigma_x^2\sigma_w^2 \quad (9)$$

iar în final, ultimul termen din (7) rezultă ca

$$\begin{aligned} E[e^2(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)] &= \text{tr}\{E[v^2(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)]\} \\ &\quad + \text{tr}\left\{E\left\{[\mathbf{c}^T(n-1)\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n)]^2 \mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right\}\right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Ultimul termen din (10) poate fi dezvoltat pe baza teoremei lui Isserlis. Astfel, după o serie de calcule, (10) devine

$$E [e^2(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)] = L\sigma_x^2\sigma_v^2 + (L+2)\sigma_x^4 \left\{ E [\|\mathbf{c}(n-1)\|_2^2] + L\sigma_w^2 \right\}, \quad (11)$$

unde  $\sigma_v^2 = E [v^2(n)]$  este varianța zgomotului aditiv.

Notând  $m(n) = E [\|\mathbf{c}(n)\|_2^2]$  și introducând (8), (9) și (11) în (7), obținem

$$\begin{aligned} m(n) &= [1 - 2\mu\sigma_x^2 + (L+2)\mu^2\sigma_x^4] m(n-1) \\ &\quad + L\mu^2\sigma_x^2 [\sigma_v^2 + (L+2)\sigma_x^2\sigma_w^2] - 2L\mu\sigma_x^2\sigma_w^2 + L\sigma_w^2. \end{aligned} \quad (12)$$

În acest punct, vom considera că pasul de adaptare  $\mu$  este dependent de timp, pentru a evalua  $\partial m(n)/\partial \mu(n) = 0$ . Aceasta conduce la pasul de adaptare optim:

$$\mu(n) = \frac{1}{(L+2)\sigma_x^2 + \xi}, \quad (13)$$

unde  $\xi = L\sigma_v^2 / [m(n-1) + L\sigma_w^2]$ . Astfel, relația de reactualizare a filtrului este

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu(n)\mathbf{x}(n)e(n). \quad (14)$$

Pentru a reactualiza parametrul  $m(n)$ , pasul de adaptare din (13) este introdus în (12) și după o serie de calcule rezultă că

$$m(n) = [1 - \mu(n)\sigma_x^2] [m(n-1) + L\sigma_w^2]. \quad (15)$$

Rezumând, algoritmul LMS optimizat este definit de relațiile (4), (14) și (15), utilizând inițializarea  $\hat{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{0}$  și  $m(0) = \varepsilon$  (unde  $\varepsilon$  este o constantă pozitivă). Acest algoritm este similar cu filtrul Kalman simplificat din [33], care a fost obținut ca o aproximare a filtrului Kalman general. De asemenea, algoritmul rezultat poate fi obținut urmând linia algoritmului NLMS și un proces de optimizare în termenii pasului de adaptare și a parametrului de regularizare [30]. Ne vom referi la acest algoritm ca JO-NLMS (*joint-optimized NLMS*).

În continuare, extindem abordarea anterioară la un algoritm de tip LMS cu factori de control individual (*individual control factors* - ICF). Acest algoritm este definit de relația de reactualizare:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \mu\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)e(n), \quad (16)$$

unde  $\mathbf{K}(n)$  este o matrice diagonală ( $L \times L$ ) conținând factorii de control la indice de timp  $n$ . Relația de reactualizare a filtrului (16) poate fi rescrisă și în termenii de aliniere a posteriori ca

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{c}(n-1) + \mathbf{w}(n) - \mu\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)e(n). \quad (17)$$

În continuare, aplicând norma  $\ell_2$  în (17), apoi operatorul de mediere statistică în ambii termeni (eliminând produsele necorelate), se obține

$$\begin{aligned} E [\|\mathbf{c}(n)\|_2^2] &= E [\|\mathbf{c}(n-1)\|_2^2] + L\sigma_w^2 - 2\mu E [\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{w}(n)e(n)] \\ &\quad - 2\mu E [\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{c}(n-1)e(n)] + \mu^2 E [e^2(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}^2(n-1)\mathbf{x}(n)]. \end{aligned} \quad (18)$$

În acest punct, trebuie prelucrați ultimii trei termeni din (18). Pe baza (6) și presupunând că semnalul de intrare este alb, primul termen de corelație devine

$$\begin{aligned} E [\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{w}(n)e(n)] &= E \{ \text{tr} [\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] \} \\ &= \sigma_w^2\sigma_x^2 \text{tr} [\mathbf{K}(n-1)] \end{aligned} \quad (19)$$

iar al doilea termen de corelație are ca rezultat

$$\begin{aligned} E [\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{c}(n-1)e(n)] &= \text{tr} \{ E [\mathbf{c}(n-1)\mathbf{c}^T(n-1)] E [\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] \mathbf{K}(n-1) \} \\ &= \sigma_x^2 \text{tr} [\mathbf{R}_c(n-1)\mathbf{K}(n-1)], \end{aligned} \quad (20)$$

unde  $\mathbf{R}_c(n) = E [\mathbf{c}(n)\mathbf{c}^T(n)]$ .

Ultimul termen din (18) este mai dificil de prelucrat. Cu toate acestea, pentru un anumit grad de staționare a semnalului de intrare și pentru valori mari ale lui  $L$  ( $L \gg 1$ ), putem trata termenul  $\|\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)\|_2^2$  ca o cantitate deterministică. De asemenea, putem folosi principiul ortogonalității, presupunând că filtrul adaptiv a converș într-un anumit grad. Folosind aceste ipoteze, ultimul termen din (18) poate fi dezvoltat ca

$$\begin{aligned} E [e^2(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}^2(n-1)\mathbf{x}(n)] &= \text{tr} \{ E [\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)] \mathbf{K}^2(n-1) \} E [e^2(n)] \\ &= \sigma_x^2 \text{tr} [\mathbf{K}^2(n-1)] [\sigma_v^2 + L\sigma_w^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2 m(n-1)]. \end{aligned} \quad (21)$$

În final, utilizând (19)–(21) în (18), rezultă că

$$\begin{aligned} m(n) &= m(n-1) + L\sigma_w^2 - 2\mu\sigma_x^2 \text{tr} \{ [\mathbf{R}_c(n-1) + \sigma_w^2\mathbf{I}_L] \mathbf{K}(n-1) \} \\ &\quad + \mu^2\sigma_x^2 \text{tr} [\mathbf{K}^2(n-1)] [\sigma_v^2 + L\sigma_w^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2 m(n-1)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Ca și în abordarea precedentă, putem impune ca  $\partial m(n)/\partial \mu(n) = 0$  (considerând că pasul de adaptare depinde de timp), pentru a obține formula pasului de adaptare optim:

$$\mu(n) = \frac{\text{tr} \{ [\mathbf{R}_c(n-1) + \sigma_w^2\mathbf{I}_L] \mathbf{K}(n-1) \}}{\text{tr} [\mathbf{K}^2(n-1)] \{ \sigma_v^2 + \sigma_x^2 [m(n-1) + L\sigma_w^2] \}}. \quad (23)$$

De asemenea, utilizând (23) în (22), relația de reactualizare a lui  $m(n)$  devine

$$m(n) = m(n-1) + L\sigma_w^2 - \frac{\sigma_x^2 \{ \text{tr} \{ [\mathbf{R}_c(n-1) + \sigma_w^2\mathbf{I}_L] \mathbf{K}(n-1) \} \}^2}{\text{tr} [\mathbf{K}^2(n-1)] \{ \sigma_v^2 + \sigma_x^2 [m(n-1) + L\sigma_w^2] \}}. \quad (24)$$

Ne vom concentra pe principalul termen de la numărătorul din (24). În primul rând, folosim notația:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(n) &= \mathbf{R}_c(n) + \sigma_w^2\mathbf{I}_L, \\ \boldsymbol{\gamma}(n) &= [\gamma_0(n) \quad \gamma_1(n) \quad \cdots \quad \gamma_{L-1}(n)]^T, \\ \mathbf{k}(n) &= [k_0(n) \quad k_1(n) \quad \cdots \quad k_{L-1}(n)]^T, \end{aligned}$$

unde  $\boldsymbol{\gamma}(n)$  și  $\mathbf{k}(n)$  sunt doi vectori care conțin elementele diagonale ale matricelor  $\mathbf{\Gamma}(n)$  și respectiv  $\mathbf{K}(n)$ . Deoarece  $\mathbf{K}(n)$  este o matrice diagonală, putem folosi inegalitatea Cauchy-Schwarz:

$$\{ \text{tr} [\mathbf{\Gamma}(n-1)\mathbf{K}(n-1)] \}^2 \leq \|\boldsymbol{\gamma}(n-1)\|_2^2 \|\mathbf{k}(n-1)\|_2^2. \quad (25)$$

Se știe că egalitatea în (25) se obține dacă și numai dacă  $\boldsymbol{\gamma}(n-1)$  și  $\mathbf{k}(n-1)$  sunt dependente liniar, adică  $\mathbf{k}(n-1) = q\boldsymbol{\gamma}(n-1)$ , cu  $q > 0$ . Astfel,

$$\begin{aligned} \text{tr} [\mathbf{K}(n-1)] &= q \text{tr} [\mathbf{\Gamma}(n-1)] = q [m(n-1) + L\sigma_w^2], \\ \text{tr} [\mathbf{K}^2(n-1)] &= \|\mathbf{k}(n-1)\|_2^2 = q^2 \|\boldsymbol{\gamma}(n-1)\|_2^2. \end{aligned} \quad (26)$$

În consecință, pasul de adaptare optim din (23) devine

$$\mu(n) = \frac{1}{q \{ \sigma_v^2 + \sigma_x^2 [m(n-1) + L\sigma_w^2] \}} \quad (27)$$

și relația de reactualizare a parametrului  $m(n)$  din (24) rezultă ca

$$m(n) = m(n-1) + L\sigma_w^2 - q\mu(n)\sigma_x^2 \|\boldsymbol{\gamma}(n-1)\|_2^2. \quad (28)$$

În final, relația de reactualizare a filtrului din (16) este evaluată ca

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + q\mu(n)\boldsymbol{\gamma}(n-1) \odot \mathbf{x}(n)\mathbf{e}(n), \quad (29)$$

unde  $\odot$  reprezintă produsul Hadamard.

Cu toate acestea, mai trebuie să găsim valoarea lui  $q$  și relația de reactualizare pentru  $\boldsymbol{\gamma}(n)$ . Parametrul  $q$  este legat de valoarea lui  $\text{tr}[\mathbf{K}(n-1)]$ , conform cu (26). În algoritmul clasic, urma acestei matrice este egală cu  $L$  [deoarece matricea  $\mathbf{K}(n-1)$  este înlocuită de  $\mathbf{I}_L$ ]. În cazul nostru, putem impune  $\text{tr}[\mathbf{K}(n-1)] = L$ , dar câștigurile vor fi distribuite individual între elementele lui  $\boldsymbol{\gamma}(n-1)$ . În consecință, putem evalua

$$q = \frac{L}{m(n-1) + L\sigma_w^2}. \quad (30)$$

Vectorul  $\boldsymbol{\gamma}(n)$  conține elementele diagonale ale matricei  $\boldsymbol{\Gamma}(n)$ . Dar această matrice depinde de  $\mathbf{R}_c(n)$ . Este interesant de observat că elementele lui  $\boldsymbol{\gamma}(n)$ , adică factorii de control individual (ICF), depind de dezalinierea coeficienților (comparativ cu algoritmi clasici de tip proporționat, unde adaptarea este controlată în funcție de mărimea coeficienților). În continuare, pe baza (17), putem exprima

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c(n) &= \mathbf{R}_c(n-1) + \sigma_w^2 \mathbf{I}_L - \mu E [\mathbf{w}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{e}(n)] \\ &\quad - \mu E [\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{w}^T(n)\mathbf{e}(n)] - \mu E [\mathbf{c}(n-1)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{e}(n)] \\ &\quad - \mu E [\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{c}^T(n-1)\mathbf{e}(n)] + \mu^2 E [e^2(n)\mathbf{K}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{K}(n-1)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Urmând o abordare similară cu cea pe care am folosit-o la prelucrarea relației (18), putem dezvolta (31), pentru a obține în final [folosind și dimensiunea optimă a pasului din (27)]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}(n) &= \boldsymbol{\gamma}(n-1) + \sigma_w^2 \mathbf{1}_{L \times 1} \\ &\quad + q\mu(n)\sigma_x^2 \{ \sigma_v^2 + \sigma_x^2 [m(n-1) + L\sigma_w^2] - 2q\mu(n) \} \boldsymbol{\gamma}(n-1) \odot \boldsymbol{\gamma}(n-1), \end{aligned} \quad (32)$$

unde  $\mathbf{1}_{L \times 1}$  reprezintă un vector coloană cu toate cele  $L$  elemente ale sale egale cu unu. Din motive de stabilitate, în acest pas ar trebui efectuată și o normalizare, adică  $\bar{\gamma}_i(n) = \gamma_i(n)/\max[q\boldsymbol{\gamma}(n)]$ , cu  $0 \leq i \leq L-1$ . Rezumând, algoritmul LMS optimizat rezultat cu factori de control individual (OLMS-ICF) este definit de relațiile (27)–(30) și (32) (inclusiv normalizarea).

Există trei parametri principali care ar trebui setați sau estimați în ambii algoritmi JO-NLMS și OLMS-ICF. Primul este varianța semnalului de intrare, care ar putea fi ușor evaluată ca în algoritmul NLMS, adică,  $\hat{\sigma}_x^2(n) = \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)/L$ . Al doilea parametru este puterea zgomotului,  $\sigma_v^2$ . Acest parametru poate fi estimat în diferite moduri; de exemplu, în compensarea ecoului acustic, acesta poate fi estimat în timpul perioadelor de tăcere ale vorbitorului de la capătul apropiat [28]. De asemenea, alte metode practice de estimare a parametrului  $\sigma_v^2$  pot fi găsite în [34]–[36].

Al treilea parametru care trebuie evaluat este  $\sigma_w^2$ , acesta fiind unul specific. În practică, ne propunem să estimăm  $\sigma_w^2$  ca în [33], aplicând norma  $\ell_2$  în ambii termeni din (2) și înlocuind  $\mathbf{h}(n)$  prin estimatul său  $\hat{\mathbf{h}}(n)$ , rezultând astfel

$$\hat{\sigma}_w^2(n) = \frac{1}{L} \left\| \hat{\mathbf{h}}(n) - \hat{\mathbf{h}}(n-1) \right\|_2^2. \quad (33)$$

Diferența din partea dreaptă a relației (33) reprezintă termenul de reactualizare al algoritmului, care poate fi folosit pentru a evita  $L$  scăderi asociate cu evaluarea directă a relației (33).

Pentru validarea algoritmilor, simulările au fost efectuate într-un scenariu de compensare a ecoului acustic [32]. În acest context, filtrul adaptiv este utilizat pentru a estima răspunsul la impuls (calea de ecou acustic) care apare datorită cuplajului acustic dintre difuzorul și microfonul unui dispozitiv de



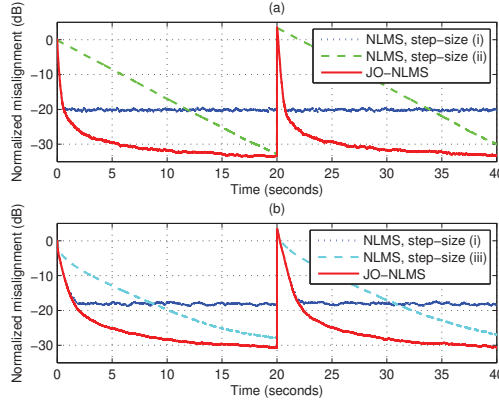


Figure 1: Dezalinierarea algoritmului NLMS cu diferite valori ale pasului de adaptare, adică (i)  $1/[\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$ , (ii)  $0.025/[\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$  și (iii)  $0.15/[\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$ , precum și dezalinierarea algoritmului JO-NLMS. Calea de ecou se schimbă după 20 de secunde,  $L = 1000$  și  $\text{SNR} = 20$  dB. Semnalul de intrare este (a) zgomot alb gaussian și (b) proces AR(1).

comunicație cu “mâini libere” (“*hands-free*”). Aceasta este o problemă dificilă de identificare a sistemului, din cauza lungimii mari și a naturii variabile în timp a căilor de ecou acustic. Lungimea răspunsului la impuls acustic utilizat în experimente este  $L = 1000$  (frecvența de eșantionare este de 8 kHz); aceeași lungime este setată pentru filtrul adaptiv. Semnalul de intrare,  $x(n)$ , este fie un zgomot alb gaussian, un proces AR(1) generat prin filtrarea unui zgomot alb gaussian printr-un sistem autoregresiv (AR) de ordinul întâi cu funcția de transfer  $1/(1 - 0,8z^{-1})$  sau o secvență de semnal vocal. Ieșirea căii ecoului este afectată de un zgomot gaussian alb independent  $v(n)$ , iar raportul semnal-zgomot (*signal-to-noise ratio* - SNR) este setat la 20 dB. În simulări, presupunem că  $\sigma_v^2$  este cunoscut sau estimat [28], [35], [36].

În primul set de experimente, evaluăm caracteristicile VSS ale algoritmului JO-NLMS. Un scenariu de schimbare a căii ecoului este simulat prin deplasarea răspunsului la impuls spre dreapta cu 12 eșantioane, la mijlocul simulării. Rezultatele sunt prezentate în Fig. 1, folosind un zgomot alb gaussian sau un proces AR(1) ca semnal de intrare. Pentru comparație este utilizat algoritmul NLMS cu diferite valori ale pasului de adaptare și incluzând un parametru de regularizare  $\delta = 20\sigma_x^2$ .

În Fig. 1, evaluarea performanței se face pe baza dezalinierii normalizate (în dB), definită ca  $20\log_{10} \left\| \mathbf{h}(n) - \hat{\mathbf{h}}(n) \right\|_2 / \left\| \mathbf{h}(n) \right\|_2$ . După cum se poate observa, algoritmul JO-NLMS are o viteză de convergență și capacitate de urmărire rapide, similare cu cele ale algoritmului NLMS care utilizează cea mai mare valoare a pasului de adaptare, realizând în același timp un nivel de dezalinieră mai scăzut.

În al doilea set de experimente, semnalul de intrare este o secvență vocală. În Fig. 2, algoritmi JO-NLMS și OLMS-ICF sunt comparați cu algoritmul IPNLMS (*improved proportionate NLMS*) [37], cu diferite valori ale pasului de adaptare și incluzând un parametru de regularizare  $\delta' = 20\sigma_x^2/L$ . De asemenea, am introdus pentru comparație algoritmul APA cu regularizare variabilă (*variable-regularized* - VR) propus în [29], folosind un ordin de proiecție egal cu unu, care este echivalent cu un algoritm VR-NLMS. După cum putem observa, OLMS-ICF depășește în performanță toți ceilalți algoritmi.

Concluzionând, algoritmi LMS cu ICF dezvoltati nu necesită parametri sau dispozitive suplimentare pentru a le monitoriza sau controla comportamentul (de exemplu, detectoare de schimbare a sistemului, praguri de stabilitate etc.), fiind astfel adecvați pentru aplicații practice. Simulările efectuate în contextul compensării ecoului acustic sprijină noțiunile teoretice și susțin performanța bună a acestor algoritmi.

De asemenea, a fost dezvoltat un algoritm de tip APA bazat pe o optimizare comună atât a pasului de adaptare, cât și a parametrului de regularizare (JO-APA). În Fig. 3, algoritmul JO-APA este comparat cu APA clasic folosind diferite valori ale pasului de adaptare  $\alpha$ . Astfel, JO-APA se comportă ca un algoritm de tip VSS-APA, obținând o viteză de convergență și capacitate de urmărire similară cu APA cu pas mare de adaptare, realizând în același timp un nivel de dezalinieră mult mai scăzut.

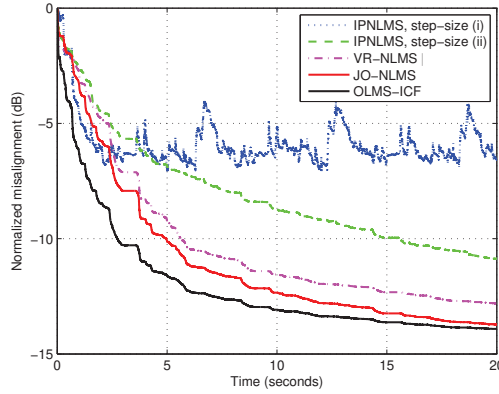


Figure 2: Dezalinierea algoritmului IPNLMS cu diferite valori ale pasului de adaptare, adică (i)  $1/[\delta' + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$  și (ii)  $0.05/[\delta' + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)]$ , precum și dezalinierea algoritmilor VR-NLMS [29], JO-NLMS și OLMS-ICF. Semnalul de intrare este o secvență vocală,  $L = 1000$  și  $\text{SNR} = 20$  dB.

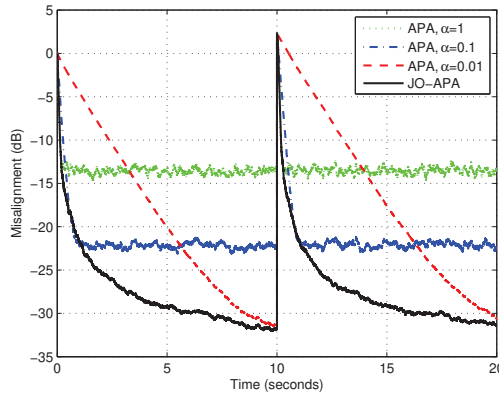


Figure 3: Dezalinierea APA (cu diferite valori ale pasului de adaptare) și dezalinierea algoritmului JO-APA. Valoarea ordinului de proiecție este  $P = 4$ , semnalul de intrare este un proces AR(1),  $L = 512$  și  $\text{SNR} = 20$  dB. Calea de ecou acustic se schimbă după 10 secunde.

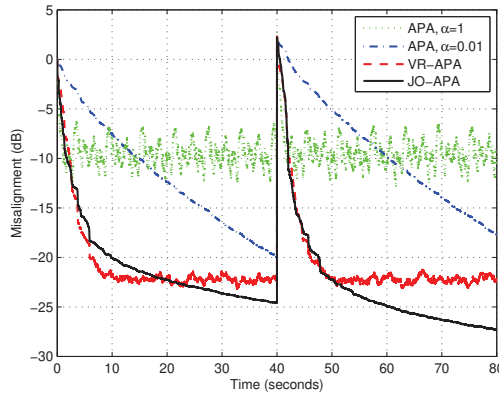


Figure 4: Dezalinierea APA (cu diferite valori ale pasului de adaptare), VR-APA [29] și JO-APA; valoarea ordinului de proiecție este  $P = 2$ . Semnalul de intrare este vocal,  $L = 512$  și  $\text{SNR} = 20$  dB. Calea de ecou acustic se schimbă după 40 de secunde.



În final, semnalul de intrare este o secvență vocală, iar algoritmul JO-APA este comparat cu varianta VR-APA din [29], care reprezintă unul dintre algoritmi VR de referință. De asemenea, APA clasic este inclus pentru comparație, folosind diferite valori ale pasului de adaptare. Rezultatele sunt prezentate în Fig. 4, folosind  $P = 2$ . Conform acestor rezultate, algoritmul JO-APA depășește atât APA clasic, cât și VR-APA, mai ales pentru o valoare mai mare a ordinului de proiecție.

În concluzie, rezultatele obținute indică faptul că algoritmul optimizat de tip APA propus realizează atât o viteză de convergență/capacitate de urmărire rapide, cât și o dezaliniere redusă. Astfel, acesta poate reprezenta o alegere atractivă pentru acest tip de aplicații acustice.

### 3.2 Noi algoritmi adaptivi de tip RLS

Algoritmul RLS reprezintă o alegere foarte atrăgătoare datorită vitezei sale rapide de convergență, care poate fi atinsă chiar și pentru semnale de intrare foarte corelate [26]. Cu toate acestea, dificultatea generală crește atunci când este necesară identificarea răspunsurilor la impuls de lungă durată, care implică provocări semnificative în ceea ce privește complexitatea, convergența, capacitatea de urmărire și acuratețea soluției. Chiar și versiunile “rapide” (*fast*) ale algoritmului RLS se confruntă cu limitări de performanță în astfel de scenarii [38]. De exemplu, în compensarea ecoului acustic, căile de ecou acustic sunt de obicei modelate ca filtre cu răspuns finit la impuls cu sute/mii de coeficienți [32].

O serie de lucrări recente s-au concentrat pe tehnici bazate pe descompunere care implică cel mai apropiat produs Kronecker (*nearest Kronecker product* - NKP) și aproximări de rang scăzut, de exemplu, a se vedea [1] și referințele asociate. Aceste metode exploatează descompunerea în valori singulare (*singular value decomposition* - SVD) a matricei corespunzătoare răspunsului la impuls remodelat (obținut prin vectorizare inversă) și caracteristica sa de rang scăzut. Ca rezultat, în timp ce abordarea convențională de identificare a sistemului se bazează pe un singur filtru adaptiv de lungime mare, metoda bazată pe NKP obține soluția folosind o combinație de două filtre (mult) mai scurte. Acest lucru se potrivește foarte bine în combinație cu algoritmi ce au convergență rapidă, precum RLS. Cu toate acestea, tehnica bazată pe NKP utilizată în aceste lucrări se bazează pe descompunerea de ordinul doi, exploatănd SVD pentru matricea (de rang scăzut) asociată răspunsului la impuls. Extinderea acestei tehnici la o descompunere de ordin superior se confruntă cu dificultatea de a opera cu un tensor de rang superior, unde rangul său rezultă dintr-o sumă de tensori de rang 1. Extinderea abordării bazate pe NKP la un nivel de descompunere de ordinul trei a fost prezentată în [3], vizând o reducere mai mare a dimensionalității (o combinație de filtre mai scurte). În acest context, rangul acestui tensorului este controlat prin intermediul rangului unei matrice, care este limitat la valori mici.

În cadrul proiectului, a fost dezvoltată metoda de descompunere a tensorilor de ordinul trei și proiectat un algoritm RLS care exploatează această tehnică eficientă [5]. Algoritmul rezultat actualizează în paralel și combină coeficienții a trei filtre adaptive de lungimi mult mai scurte (în comparație cu lungimea răspunsului la impuls original).

În continuare este rezumat contextul din [3], care a introdus recent abordarea bazată pe descompunerea tensorilor de ordinul trei, în cadrul identificării sistemelor liniare. În acest scop, vom lua în considerare un scenariu cu o singură intrare și o singură ieșire (*single-input single-output* - SISO) cu semnale cu valori reale. Scopul principal este de a identifica un răspuns la impuls necunoscut cu  $L$  coeficienți, care sunt grupați în vectorul  $\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_L]^T$ , unde  $T$  indică operatorul de transpunere. Astfel, la momentul de timp discret  $n$ , rezultă semnalul de referință (sau dorit):

$$d(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) + w(n) = y(n) + w(n), \quad (34)$$

unde  $\mathbf{x}(n) = [x(n) \ x(n-1) \ \dots \ x(n-L+1)]^T$  conține cele mai recente  $L$  eșantioane ale semnalului de intrare de medie nulă  $x(n)$ ,  $y(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n)$  este semnalul de ieșire, iar  $w(n)$  este un zgomot aditiv de medie zero, care este necorelat cu  $x(n)$ .

În continuare, vom considera că lungimea lui  $\mathbf{h}$  poate fi exprimată ca  $L = L_{11}L_{12}L_2$ , cu  $L_{11} \geq L_{12}$  și

$L_{11}L_{12} \gg L_2$ . Prin urmare, răspunsul la impuls poate fi descompus în mod echivalent ca [3]

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{L_2} \mathbf{h}_2^i \otimes \left( \sum_{j=1}^{L_{12}} \mathbf{h}_{12}^{ij} \otimes \mathbf{h}_{11}^{ij} \right) = \sum_{i=1}^{L_2} \sum_{j=1}^{L_{12}} \mathbf{h}_2^i \otimes \mathbf{h}_{12}^{ij} \otimes \mathbf{h}_{11}^{ij}, \quad (35)$$

unde răspunsurile la impuls (mai scurte)  $\mathbf{h}_{11}^{ij}$ ,  $\mathbf{h}_{12}^{ij}$  și  $\mathbf{h}_2^i$  au lungimile  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  și respectiv  $L_2$ , în timp ce  $\otimes$  reprezintă produsul Kronecker. În acest moment, deoarece  $\mathbf{h}_2^i$  este considerat foarte scurt, nu este nevoie să-l descompunem, ci să considerăm că produsul Kronecker al celorlalte două componente este de rang scăzut [39]. În consecință, (35) devine

$$\mathbf{h} = \sum_{l=1}^{L_2} \mathbf{h}_2^l \otimes \left( \sum_{p=1}^P \mathbf{h}_{12}^{lp} \otimes \mathbf{h}_{11}^{lp} \right) = \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \mathbf{h}_2^l \otimes \mathbf{h}_{12}^{lp} \otimes \mathbf{h}_{11}^{lp}, \quad (36)$$

unde  $P < L_{12}$ . Aceasta este o abordare rezonabilă, deoarece (în practică) majoritatea răspunsurilor la impuls asociate sistemelor reale sunt de rang scăzut [1]. După cum se poate observa, o reprezentare echivalentă a relației (36) într-o formă de tensor de ordinul trei este

$$\mathcal{H} = \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \mathbf{h}_{11}^{lp} \circ \mathbf{h}_{12}^{lp} \circ \mathbf{h}_2^l = \sum_{p=1}^P \left( \sum_{l=1}^{L_2} \mathcal{H}^{lp} \right) = \sum_{p=1}^P \underline{\mathcal{H}}^p, \quad (37)$$

unde  $\mathcal{H}^{lp} = \mathbf{h}_{11}^{lp} \circ \mathbf{h}_{12}^{lp} \circ \mathbf{h}_2^l$  și  $\underline{\mathcal{H}}^p = \sum_{l=1}^{L_2} \mathcal{H}^{lp}$  sunt tensori de ordinul trei (de ranguri diferite), care aparțin lui  $\mathbb{R}^{L_{11} \times L_{12} \times L_2}$ . După cum putem observa,  $\underline{\mathcal{H}}^p$  corespunde descompunerii canonice poliadice (*canonical polyadic* - CP) [40], adică reprezentarea unui tensor de ordinul trei într-o sumă de tensori de rang 1 (de ordinul trei),  $\mathcal{H}^{lp}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L_2$ . În acest context,  $L_2$  reprezintă rangul lui  $\underline{\mathcal{H}}^p$ , adică numărul minim de tensori de rang 1 care generează  $\underline{\mathcal{H}}^p$ . Prin urmare,  $\mathcal{H}$  este suma a  $P$  tensori de ordinul trei, de rang  $L_2$ . Pe de altă parte, pe baza relației (35), reprezentarea lui  $\mathbf{h}$  într-o formă de matrice este

$$\mathbf{H} = \sum_{l=1}^{L_2} \left( \sum_{j=1}^{L_{12}} \mathbf{h}_{12}^{lj} \otimes \mathbf{h}_{11}^{lj} \right) (\mathbf{h}_2^l)^T = \sum_{l=1}^{L_2} \left( \sum_{j=1}^{L_{12}} \mathbf{h}_{12}^{lj} \otimes \mathbf{h}_{11}^{lj} \right) \circ \mathbf{h}_2^l. \quad (38)$$

Dimensiunea acestei matrice este  $L_{11}L_{12} \times L_2$ , în timp ce rangul ei maxim este  $L_2$  (cu  $L_2 \ll L_{11}L_{12}$ ). Concluzionând, pe baza relațiilor (37) și (38), rangul unui tensor de ordinul trei este controlat prin rangul unei matrice, care este limitat la valori mici. Cu alte cuvinte, problema sensibilă a aproximării rangului unui tensor este evitată datorită controlului unui rang de matrice.

În acest cadru de descompunere, accentul principal este pus pe identificarea răspunsurilor la impuls din relația (36). Astfel, identificarea răspunsului la impuls  $\mathbf{h}$  (cu  $L = L_{11}L_{12}L_2$  coeficienți) este reformulată ca o combinație de trei seturi de coeficienți, adică  $\mathbf{h}_2^l$  de lungime  $L_2$  (cu  $l = 1, 2, \dots, L_2$ ),  $\mathbf{h}_{12}^{lp}$  de lungime  $L_{12}$  și  $\mathbf{h}_{11}^{lp}$  de lungime  $L_{11}$  (cu  $l = 1, 2, \dots, L_2$  și  $p = 1, 2, \dots, P$ ). În acest context, trebuie să estimăm  $L_2^2$ ,  $PL_{12}L_2$  și respectiv  $PL_{11}L_2$  coeficienți. Pentru configurația uzuală de descompunere care implică  $L_{11}L_{12} \gg L_2$  și  $P \ll L_{12}$  [3], aceasta reprezintă o reducere importantă a dimensionalității, în special pentru valori mari ale lui  $L$ .

Obiectivul problemei de identificare a sistemului SISO din (34) este de a estima  $\mathbf{h}$  având la dispoziție vectorul semnalului de intrare  $\mathbf{x}(n)$  și semnalul de referință  $d(n)$ . Pe de altă parte, abordarea bazată pe descompunere prezentată anterior vizează estimarea a trei seturi mai scurte de coeficienți, care sunt combinate împreună. În acest scop, a fost dezvoltat un filtru adaptiv RLS care exploatează această tehnică de descompunere.

În acest context, să considerăm că  $\hat{\mathbf{h}}(n)$  este un estimat al răspunsului la impuls  $\mathbf{h}$ , la momentul de timp  $n$ , astfel încât semnalul de eroare (a priori) rezultă ca  $e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{h}}^T(n-1)\mathbf{x}(n)$ . Pe de altă parte, folosind descompunerea răspunsului la impuls din (36), putem exprima și estimatul acestuia ca

$\widehat{\mathbf{h}}(n) = \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n) \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n) \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n)$ , unde  $\widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n)$ ,  $\widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n)$  și  $\widehat{\mathbf{h}}_2^l(n)$  sunt trei răspunsuri la impuls mai scurte, de lungime  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  și respectiv  $L_2$ . În continuare, pentru a construi funcțiile cost ale algoritmului de tip RLS, putem rescrie  $e(n)$  în trei moduri echivalente, cu scopul de a “extrage” fiecare componentă individuală. În continuare, notația  $\mathbf{I}_{L_\bullet}$  reprezintă matricea identitate de dimensiune  $L_\bullet \times L_\bullet$ .

În primul rând, putem dezvolta eroarea a priori ca

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \left[ \mathbf{I}_{L_2} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n-1) \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n-1) \right] \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n-1) \\ &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^{lp}(n-1) \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n-1) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^l(n-1) \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n-1) \\ &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{12,11}(n-1) \widehat{\underline{\mathbf{h}}}_2(n-1) = d(n) - \widehat{\underline{\mathbf{h}}}_2^T(n-1) \mathbf{x}_{12,11}(n), \end{aligned} \quad (39)$$

unde  $\widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^{lp}(n) = \mathbf{I}_{L_2} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n) \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n)$  este o matrice de dimensiune  $L \times L_2$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^l(n) = \sum_{p=1}^P \widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^{lp}(n)$ , matricea  $\widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{12,11}(n) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^1(n) & \widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^2(n) & \cdots & \widehat{\mathbf{H}}_{12,11}^{L_2}(n) \end{bmatrix}$  are dimensiunea  $L \times L_2^2$ , vectorul  $\widehat{\underline{\mathbf{h}}}_2(n) = \begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{h}}_2^1\right)^T(n) & \left(\widehat{\mathbf{h}}_2^2\right)^T(n) & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{h}}_2^{L_2}\right)^T(n) \end{bmatrix}^T$  are lungimea  $L_2^2$ , iar  $\mathbf{x}_{12,11}(n) = \widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{12,11}^T(n-1) \mathbf{x}(n)$ . După cum putem observa, forma din relația (39) vizează extragerea și separarea componentelor  $\widehat{\mathbf{h}}_2^l(n)$ ,  $l = 1, 2, \dots, L_2$ .

În al doilea rând, același semnal eroare poate fi rescris alternativ ca

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \left[ \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_{12}} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n-1) \right] \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n-1) \\ &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^{lp}(n-1) \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n-1) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^l(n-1) \widehat{\mathbf{h}}_{12}^l(n-1) \\ &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{2,11}(n-1) \widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}(n-1) = d(n) - \widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}^T(n-1) \mathbf{x}_{2,11}(n), \end{aligned} \quad (40)$$

unde  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^{lp}(n) = \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n) \otimes \mathbf{I}_{L_{12}} \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n)$  este o matrice de dimensiune  $L \times L_{12}$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^l(n) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^{l1}(n) & \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^{l2}(n) & \cdots & \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^{lP}(n) \end{bmatrix}$  are dimensiunea  $L \times PL_{12}$ , vectorul  $\widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}^l(n) = \begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{h}}_{12}^{l1}\right)^T(n) & \left(\widehat{\mathbf{h}}_{12}^{l2}\right)^T(n) & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lP}\right)^T(n) \end{bmatrix}^T$  are lungimea  $PL_{12}$ , matricea  $\widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{2,11}(n) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^1(n) & \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^2(n) & \cdots & \widehat{\mathbf{H}}_{2,11}^{L_2}(n) \end{bmatrix}$  are dimensiunea  $L \times PL_{12}L_2$ , vectorul  $\widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}(n) = \begin{bmatrix} \left(\widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}^1}\right)^T(n) & \left(\widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}^2}\right)^T(n) & \cdots & \left(\widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{12}^{L_2}\right)^T(n) \end{bmatrix}^T$  are lungimea  $PL_{12}L_2$ , iar  $\mathbf{x}_{2,11}(n) = \widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{2,11}^T(n-1) \mathbf{x}(n)$ .

Astfel, relația (40) este concepută pentru extragerea  $\widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n)$ ,  $l = 1, 2, \dots, L_2$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$ .

A treia și ultima modalitate de procesare a erorii a priori are ca rezultat

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \left[ \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n-1) \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n-1) \otimes \mathbf{I}_{L_{11}} \right] \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n-1) \\ &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \sum_{p=1}^P \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^{lp}(n-1) \widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n-1) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \sum_{l=1}^{L_2} \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^l(n-1) \widehat{\mathbf{h}}_{11}^l(n-1) \\ &= d(n) - \mathbf{x}^T(n) \widehat{\underline{\mathbf{H}}}_{2,12}(n-1) \widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{11}(n-1) = d(n) - \widehat{\underline{\mathbf{h}}}_{11}^T(n-1) \mathbf{x}_{2,12}(n), \end{aligned} \quad (41)$$

unde  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^{lp}(n) = \widehat{\mathbf{h}}_2^l(n) \otimes \widehat{\mathbf{h}}_{12}^{lp}(n) \otimes \mathbf{I}_{L_{11}}$  este o matrice de dimensiune  $L \times L_{11}$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^l(n) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^{l1}(n) & \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^{l2}(n) & \cdots & \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^{lP}(n) \end{bmatrix}$  are dimensiunea  $L \times PL_{11}$ ,  $\widehat{\mathbf{h}}_{11}^l(n) = \begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{h}}_{11}^{l1}\right)^T(n) & \left(\widehat{\mathbf{h}}_{11}^{l2}\right)^T(n) & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lP}\right)^T(n) \end{bmatrix}^T$  este un vector de lungime  $PL_{11}$ ,  $\widehat{\mathbf{H}}_{2,12}(n) = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^1(n) & \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^2(n) & \cdots & \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^{L_2}(n) \end{bmatrix}$  este o matrice de dimensiune  $L \times PL_{11}L_2$ , vectorul  $\widehat{\mathbf{h}}_{11}(n) = \begin{bmatrix} \left(\widehat{\mathbf{h}}_{11}^1}\right)^T(n) & \left(\widehat{\mathbf{h}}_{11}^2}\right)^T(n) & \cdots & \left(\widehat{\mathbf{h}}_{11}^{L_2}\right)^T(n) \end{bmatrix}^T$  are lungimea  $PL_{11}L_2$ , iar  $\mathbf{x}_{2,12}(n) = \widehat{\mathbf{H}}_{2,12}^T(n-1)\mathbf{x}(n)$ .  
Expresia din (41) conduce la separarea  $\widehat{\mathbf{h}}_{11}^{lp}(n)$ ,  $l = 1, 2, \dots, L_2$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$ .

În acest moment, pe baza relațiilor (39)–(41) și folosind criteriul de optimizare în sensul celor mai mici pătrate (*least-squares* - LS) [26], putem defini trei funcții cost asociate filtrelor componente, după cum urmează:

$$\tilde{\mathcal{J}} \left[ \widehat{\mathbf{h}}_2(n) | \widehat{\mathbf{h}}_{12}, \widehat{\mathbf{h}}_{11} \right] = \sum_{k=1}^n \lambda_2^{n-k} \left[ d(k) - \widehat{\mathbf{h}}_2^T(n) \mathbf{x}_{12,11}(k) \right]^2, \quad (42)$$

$$\tilde{\mathcal{J}} \left[ \widehat{\mathbf{h}}_{12}(n) | \widehat{\mathbf{h}}_2, \widehat{\mathbf{h}}_{11} \right] = \sum_{k=1}^n \lambda_{12}^{n-k} \left[ d(k) - \widehat{\mathbf{h}}_{12}^T(n) \mathbf{x}_{2,11}(k) \right]^2, \quad (43)$$

$$\tilde{\mathcal{J}} \left[ \widehat{\mathbf{h}}_{11}(n) | \widehat{\mathbf{h}}_2, \widehat{\mathbf{h}}_{12} \right] = \sum_{k=1}^n \lambda_{11}^{n-k} \left[ d(k) - \widehat{\mathbf{h}}_{11}^T(n) \mathbf{x}_{2,12}(k) \right]^2, \quad (44)$$

unde  $\lambda_2$ ,  $\lambda_{12}$  și  $\lambda_{11}$  sunt factorii de uitare, ce reprezintă constante pozitive mai mici sau egale cu unu. După cum sugerează notația din partea stângă a relațiilor (42)–(44), două din cele trei răspunsuri la impuls componente sunt considerate fixe în cadrul criteriului LS (la un moment dat), similar cu o strategie de optimizare multiliniară. Pe baza acestor considerații, se obțin trei seturi de ecuații normale din minimizarea funcțiilor (42), (43) și (44) în raport cu  $\widehat{\mathbf{h}}_2(n)$ ,  $\widehat{\mathbf{h}}_{12}(n)$  și respectiv  $\widehat{\mathbf{h}}_{11}(n)$ , astfel:

$$\mathbf{R}_{12,11}(n) \widehat{\mathbf{h}}_2(n) = \mathbf{r}_{12,11}(n), \quad (45)$$

$$\mathbf{R}_{2,11}(n) \widehat{\mathbf{h}}_{12}(n) = \mathbf{r}_{2,11}(n), \quad (46)$$

$$\mathbf{R}_{2,12}(n) \widehat{\mathbf{h}}_{11}(n) = \mathbf{r}_{2,12}(n), \quad (47)$$

unde

$$\mathbf{R}_{12,11}(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_2^{n-k} \mathbf{x}_{12,11}(k) \mathbf{x}_{12,11}^T(k) = \lambda_2 \mathbf{R}_{12,11}(n-1) + \mathbf{x}_{12,11}(n) \mathbf{x}_{12,11}^T(n), \quad (48)$$

$$\mathbf{r}_{12,11}(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_2^{n-k} \mathbf{x}_{12,11}(k) d(k) = \lambda_2 \mathbf{r}_{12,11}(n-1) + \mathbf{x}_{12,11}(n) d(n), \quad (49)$$

$$\mathbf{R}_{2,11}(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_{12}^{n-k} \mathbf{x}_{2,11}(k) \mathbf{x}_{2,11}^T(k) = \lambda_{12} \mathbf{R}_{2,11}(n-1) + \mathbf{x}_{2,11}(n) \mathbf{x}_{2,11}^T(n), \quad (50)$$

$$\mathbf{r}_{2,11}(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_{12}^{n-k} \mathbf{x}_{2,11}(k) d(k) = \lambda_{12} \mathbf{r}_{2,11}(n-1) + \mathbf{x}_{2,11}(n) d(n), \quad (51)$$

$$\mathbf{R}_{2,12}(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_{11}^{n-k} \mathbf{x}_{2,12}(k) \mathbf{x}_{2,12}^T(k) = \lambda_{11} \mathbf{R}_{2,12}(n-1) + \mathbf{x}_{2,12}(n) \mathbf{x}_{2,12}^T(n), \quad (52)$$

$$\mathbf{r}_{2,12}(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_{11}^{n-k} \mathbf{x}_{2,12}(k) d(k) = \lambda_{11} \mathbf{r}_{2,12}(n-1) + \mathbf{x}_{2,12}(n) d(n). \quad (53)$$

Pentru a evita operațiile de inversare a matricii în rezolvarea ecuațiilor (45)–(47), formula Woodbury (lema de inversare a matricii) poate fi utilizată în relațiile (48), (50), respectiv (52), obținându-se astfel actualizările recursive:

$$\mathbf{P}_{12,11}(n) = \lambda_2^{-1} \left[ \mathbf{I}_{L_2^2} - \mathbf{k}_{12,11}(n) \mathbf{x}_{12,11}^T(n) \right] \mathbf{P}_{12,11}(n-1), \quad (54)$$

$$\mathbf{P}_{2,11}(n) = \lambda_{12}^{-1} \left[ \mathbf{I}_{PL_{12}L_2} - \mathbf{k}_{2,11}(n) \mathbf{x}_{2,11}^T(n) \right] \mathbf{P}_{2,11}(n-1), \quad (55)$$

$$\mathbf{P}_{2,12}(n) = \lambda_{11}^{-1} \left[ \mathbf{I}_{PL_{11}L_2} - \mathbf{k}_{2,12}(n) \mathbf{x}_{2,12}^T(n) \right] \mathbf{P}_{2,12}(n-1), \quad (56)$$

unde notațiile  $\mathbf{P}_{12,11}(n)$ ,  $\mathbf{P}_{2,11}(n)$  și  $\mathbf{P}_{2,12}(n)$  reprezintă  $\mathbf{R}_{12,11}^{-1}(n)$ ,  $\mathbf{R}_{2,11}^{-1}(n)$  și respectiv  $\mathbf{R}_{2,12}^{-1}(n)$ , iar  $\mathbf{k}_{12,11}(n) = \mathbf{P}_{12,11}(n) \mathbf{x}_{12,11}(n)$ ,  $\mathbf{k}_{2,11}(n) = \mathbf{P}_{2,11}(n) \mathbf{x}_{2,11}(n)$ , și  $\mathbf{k}_{2,12}(n) = \mathbf{P}_{2,12}(n) \mathbf{x}_{2,12}(n)$  sunt vectorii câștig Kalman, care sunt evaluați ca

$$\mathbf{k}_{12,11}(n) = \frac{\mathbf{P}_{12,11}(n-1) \mathbf{x}_{12,11}(n)}{\lambda_2 + \mathbf{x}_{12,11}^T(n) \mathbf{P}_{12,11}(n-1) \mathbf{x}_{12,11}(n)}, \quad (57)$$

$$\mathbf{k}_{2,11}(n) = \frac{\mathbf{P}_{2,11}(n-1) \mathbf{x}_{2,11}(n)}{\lambda_{12} + \mathbf{x}_{2,11}^T(n) \mathbf{P}_{2,11}(n-1) \mathbf{x}_{2,11}(n)}, \quad (58)$$

$$\mathbf{k}_{2,12}(n) = \frac{\mathbf{P}_{2,12}(n-1) \mathbf{x}_{2,12}(n)}{\lambda_{11} + \mathbf{x}_{2,12}^T(n) \mathbf{P}_{2,12}(n-1) \mathbf{x}_{2,12}(n)}. \quad (59)$$

În cele din urmă, actualizările filtrelor rezultă prin dezvoltarea ecuațiilor normale (45)–(47). De exemplu, folosind secvențial relațiile (49), (54) și (39) în (45), luând în considerare soluția disponibilă de la momentul de timp anterior, adică  $\hat{\mathbf{h}}_2(n-1) = \mathbf{P}_{12,11}(n-1) \mathbf{r}_{12,11}(n-1)$ , putem dezvolta

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_2(n) &= \mathbf{P}_{12,11}(n) \mathbf{r}_{12,11}(n) = \lambda_2^{-1} \left[ \mathbf{I}_{L_2^2} - \mathbf{k}_{12,11}(n) \mathbf{x}_{12,11}^T(n) \right] \mathbf{P}_{12,11}(n-1) [\lambda_2 \mathbf{r}_{12,11}(n-1) + \mathbf{x}_{12,11}(n) d(n)] \\ &= \hat{\mathbf{h}}_2(n-1) + \mathbf{k}_{12,11}(n) \left[ d(n) - \mathbf{x}_{12,11}^T(n) \hat{\mathbf{h}}_2(n-1) \right] = \hat{\mathbf{h}}_2(n-1) + \mathbf{k}_{12,11}(n) e(n). \end{aligned} \quad (60)$$

În mod similar, actualizările pentru celelalte două filtre componente rezultă prin utilizarea relațiilor (51), (55) și (40) în (46), apoi (53), (56) și (41) în (47), care duc în cele din urmă la

$$\hat{\mathbf{h}}_{12}(n) = \hat{\mathbf{h}}_{12}(n-1) + \mathbf{k}_{2,11}(n) e(n), \quad (61)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_{11}(n) = \hat{\mathbf{h}}_{11}(n-1) + \mathbf{k}_{2,12}(n) e(n). \quad (62)$$

Algoritmul RLS rezultat este bazat pe descompunerea tensorului de ordinul trei (*third-order tensor - TOT*), fiind astfel denumit RLS-TOT. Se știe că ordinul de complexitate al algoritmilor bazați pe RLS este proporțional cu pătratul lungimii filtrului [26]. Prin urmare, în comparație cu algoritmul RLS convențional [adică  $\mathcal{O}(L^2) = \mathcal{O}(L_{11}L_{12}L_2)^2$ ], algoritmul RLS-TOT are un ordin de complexitate mai mică, adică  $\mathcal{O}[L_2^4 + (PL_{11}L_2)^2 + (PL_{12}L_2)^2]$ , pentru alegerea uzuală a parametrilor de descompunere. Acest lucru este susținut în Fig. 5, unde sunt prezentate ordinele de complexitate ale algoritmilor RLS convențional și RLS-TOT (cu diferite configurații de descompunere), luând în considerare un răspuns la impuls de lungime  $L = 2048$ . Deoarece valoarea lui  $P$  este de obicei semnificativ mai mică decât  $L_{12}$ , în timp ce  $L_{12} \ll L$ , complexitatea generală a algoritmului RLS-TOT poate fi mult mai mică, prin comparație cu omologul său convențional.

Cadrul experimental considerat este compensarea ecoului, având ca scop identificarea a două căi de ecou ( $\mathbf{h}$ ) cu caracteristici diferite. Primul răspuns la impuls utilizat în simulări reprezintă o cale ecou de rețea din cadrul Recomandării ITU-T G168 [41], care este completată cu zerouri până la lungimea  $L = 512$ . Al doilea răspuns la impuls caracterizează o cale (măsurată) de ecou acustic, cu lungime  $L = 2048$ . Semnalul de intrare  $x(n)$  este fie un proces autoregresiv de ordinul întâi, AR(1) [care se obține prin filtrarea unui zgomot alb gaussian printr-o funcție de transfer AR(1) cu polul la 0,8] sau un semnal vocal; frecvența de eșantionare este de 8 kHz. Ieșirea căii ecoului,  $y(n)$ , este afectată de un zgomot

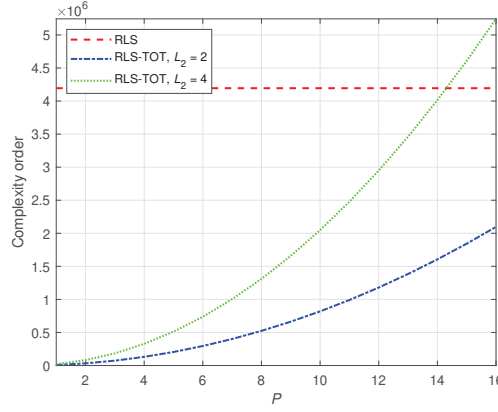


Figure 5: Ordinele de complexitate ale algoritmilor RLS convențional (cu  $L = 2048$ ) și RLS-TOT propus, folosind valori diferite pentru  $L_2$ . Pentru  $L_2 = 2$  configurația de descompunere a RLS-TOT implică  $L_{11} = L_{12} = 32$ , în timp ce pentru  $L_2 = 4$  folosim  $L_{11} = 32$  și  $L_{12} = 16$ .

alb gaussian,  $w(n)$ , cu diferite rapoarte semnal pe zgomot (*signal-to-noise ratio* - SNR). Pentru a testa capacitățile de urmărire ale algoritmilor, o schimbare bruscă a răspunsului la impuls este considerată în toate experimentele, prin schimbarea semnului coeficienților după 2,5 secunde. Analiza performanțelor se realizează pe baza dezalinierei normate (în dB), care este evaluată ca  $20\log_{10} \left[ \frac{\|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}(n)\|}{\|\mathbf{h}\|} \right]$ , unde  $\|\cdot\|$  reprezintă norma euclidiană.

Primul set de experimente implică răspunsul la impuls al rețelei de lungime  $L = 512$ . Comparațiile sunt efectuate folosind algoritmul RLS convențional ca referință, împreună cu algoritmul RLS dezvoltat anterior folosind descompunerea NKP (RLS-NKP) [39] și RLS-TOT propus. Algoritmul RLS convențional folosește un singur filtru adaptiv de lungime  $L = 512$ . Algoritmul RLS-NKP se bazează pe o descompunere de ordinul doi a răspunsului la impuls global și combină estimările furnizate de două filtre adaptive de lungimi  $P^*L_1^*$  și  $P^*L_2^*$ , cu  $L = L_1^*L_2^*$  și  $P^* < L_2^*$  [39]; în acest set de experimente, configurația de descompunere folosește  $L_1^* = 32$  și  $L_2^* = 16$ . După cum s-a explicat anterior, algoritmul RLS-TOT propus implică trei filtre adaptive de lungimi  $PL_{11}L_2$ ,  $PL_{12}L_2$  și  $L_2^2$ , unde  $L = L_{11}L_{12}L_2$ , cu  $L_2 \ll L_{11}L_{12}$  și  $P < L_{12}$ . După cum se arată în [3], valoarea lui  $L_2$  ar trebui să fie foarte mică, de exemplu, 2, 3 sau 4, în timp ce diferențele de performanță sunt minore. În consecință, în următoarele experimente care implică răspunsul la impuls al rețelei de lungime  $L = 512$ , s-au stabilit  $L_{11} = L_{12} = 16$  și  $L_2 = 2$ .

Principalii parametri ai algoritmilor de tip RLS utilizați în comparații sunt factorii de uitare. În timp ce algoritmul RLS convențional implică un singur factor de uitare (notat cu  $\lambda$ ), algoritmul RLS-NKP [39] folosește doi factori de uitare,  $\lambda_1^*$  și  $\lambda_2^*$ , care corespund celor două filtre adaptive. În consecință, algoritmul RLS-TOT propus necesită trei factori de uitare,  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$  și  $\lambda_2$ . Alegerea valorii unui factor de uitare implică un compromis între principalele criterii de performanță, adică viteză de convergență/capacitate de urmărire rapide și dezaliniere scăzută. În general, valoarea unui factor de uitare  $\lambda_\bullet$  poate fi legată de lungimea filtrului asociat (notată cu  $L_\bullet$ ), conform relației:

$$\lambda_\bullet = 1 - (KL_\bullet)^{-1}, \quad (63)$$

cu  $K > 1$ . Cu alte cuvinte, cu cât filtrul este mai lung, cu atât este mai mare valoarea factorului de uitare. O valoare mai mare a lui  $K$  conduce la  $\lambda_\bullet$  mai aproape de unu, ceea ce îmbunătățește acuratețea soluției (o dezaliniere mai mică), dar sacrifică capacitatea de urmărire. De asemenea, ar trebui să subliniem că viteza de convergență inițială nu este întotdeauna relevantă pentru algoritmii de tip RLS, în timp ce capacitatea de urmărire reprezintă adevărata evaluare [38].

În primul experiment raportat în Fig. 6, toți algoritmii folosesc  $K = 30$  în (63), pentru factorii de uitare asociați. Semnalul de intrare este un proces AR(1) și SNR = 20 dB. Algoritmii bazați pe descompunere (RLS-NKP și RLS-TOT) folosesc valori diferite ale parametrilor lor specifici,  $P^*$  și respectiv  $P$ .



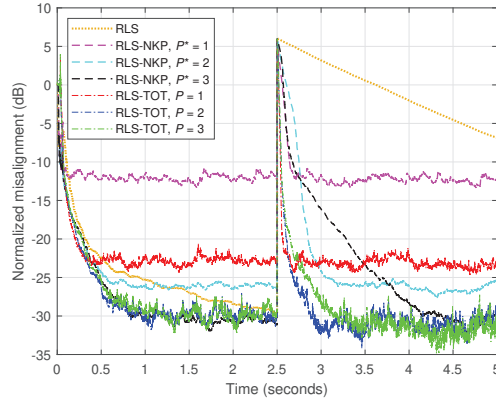


Figure 6: Dezalinierea normată a algoritmilor RLS convențional, RLS-NKP [39] și RLS-TOT propus, pentru identificarea unui răspuns la impuls de rețea de lungime  $L = 512$ . Factorii de uitare sunt stabiliți pe baza relației (63), folosind  $K = 30$ . RLS-NKP folosește  $L_1^* = 32$ ,  $L_2^* = 16$  și diferite valori ale lui  $P^*$ . RLS-TOT propus utilizează  $L_{11} = L_{12} = 16$ ,  $L_2 = 2$  și valori diferite ale lui  $P$ . Semnalul de intrare este un proces AR(1), SNR = 20 dB, iar calea de ecou se modifică după 2,5 secunde.

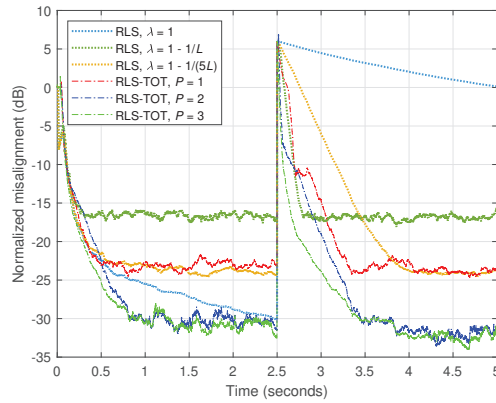


Figure 7: Dezalinierea normată a algoritmilor RLS convențional (folosind diferite valori ale factorului de uitare  $\lambda$ ) și RLS-TOT propus, pentru identificarea unui răspuns la impuls al rețelei de lungime  $L = 512$ . RLS-TOT folosește setul  $\lambda_{11}$  și  $\lambda_{12}$  bazat pe relația (63), cu  $K = 30$ , în timp ce  $\lambda_2 = 1$ . Celelalte condiții sunt aceleași ca în Fig. 6.

Se poate observa că ambii algoritmi urmăresc mult mai rapid în comparație cu RLS convențional, pentru un nivel de dezaliniere similar (care este atins înainte de schimbarea sistemului). De asemenea, RLS-TOT depășește RLS-NKP dezvoltat anterior atât în ceea ce privește capacitatea de convergență/urmărire, cât și nivelul de dezaliniere, în majoritatea cazurilor când  $P^* = P$ . Excepția corespunde cazului în care  $P^* = P = 3$ , atunci când algoritmi bazati pe descompunere ating același nivel de dezaliniere, dar RLS-TOT urmărește mai repede decât RLS-NKP. De fapt, aceasta reprezintă o limită de performanță (în termeni de acuratețe/dezaliniere), deoarece rangul matricei corespunzătoare lui  $\mathbf{h}$  este 3 [39]. Creșterea valorilor parametrilor de descompunere peste această limită nu va reduce nivelul de dezaliniere. Acest experiment indică faptul că RLS-TOT poate folosi o valoare mai mică a parametrului de descompunere ( $P$ ), în comparație cu omologul său RLS-NKP ( $P^*$ ). Chiar și pentru  $P = 1$ , RLS-TOT asigură o bună atenuare a dezalinierei, cu o capacitate de urmărire foarte rapidă.

O strategie interesantă care ar putea fi luată în considerare în cazul RLS-TOT propus este de a seta valoarea maximă a factorului de uitare pentru cel mai scurt filtru (de lungime  $L_2^2$ ), adică  $\lambda_2 = 1$ . Deoarece



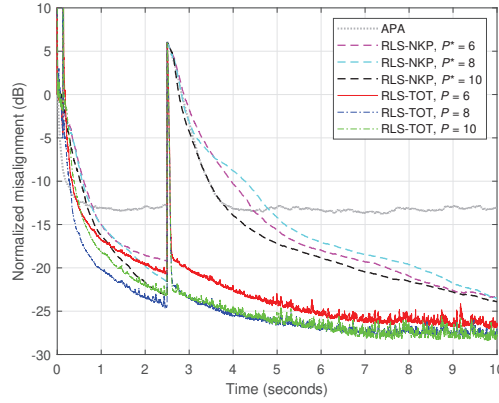


Figure 8: Dezalinierea normată a APA [43], RLS-NKP [39] și RLS-TOT propus, pentru identificarea unui răspuns la impuls acustic de lungime  $L = 2048$ . Ordinul de proiecție al APA este  $M = 8$  și pasul de adaptare este  $\mu = 1$ . Factorii de uitare ai RLS-NKP și RLS-TOT sunt stabiliți pe baza relației (63), folosind  $K = 50$ . RLS-NKP utilizează  $L_1^* = 64$ ,  $L_2^* = 32$  și valori diferite ale lui  $P^*$ . RLS-TOT propus utilizează  $L_{11} = L_{12} = 32$ ,  $L_2 = 2$  și valori diferite ale lui  $P$ . Semnalul de intrare este un proces AR(1), SNR = 20 dB, iar calea de ecou se modifică după 2,5 secunde.

acest filtru are doar câțiva coeficienți, nu s-ar afecta prea mult comportamentul de urmărire al filtrului global, îmbunătățind în același timp dezalinierea acestuia. Acest lucru este susținut în Fig. 7, unde RLS-TOT este comparat cu algoritmul RLS convențional folosind diferite valori ale factorului de uitare. Pe baza rezultatelor acestui experiment, se pot contura mai multe concluzii, după cum urmează. În primul rând, algoritmul RLS convențional care utilizează factorul său maxim de uitare ( $\lambda = 1$ ) ar putea atinge un nivel de dezaliniere similar cu RLS-TOT folosind  $P = 2$  sau 3, dar este semnificativ mai lent în urmărirea schimbării bruște a sistemului. Valoarea lui  $\lambda$  ar trebui crescută semnificativ (de exemplu,  $\lambda = 1 - 1/L$ ) pentru algoritmul RLS convențional, pentru a se alinia cu reacția de urmărire a RLS-TOT. Cu toate acestea, dezalinierea algoritmului convențional este semnificativ mai mare în acest caz. În cele din urmă, algoritmul RLS convențional care utilizează o valoare mai mare a factorului de uitare [de exemplu,  $\lambda = 1 - 1/(5L)$ ] poate atinge nivelul de dezaliniere al RLS-TOT folosind  $P = 1$ , dar este încă depășit de algoritmul propus în ceea ce privește capacitatea de urmărire. Mai mult, pentru  $P = 1$ , RLS-TOT folosește o combinație de trei filtre de lungimi 32, 32 și 4, în timp ce algoritmul RLS convențional implică un singur filtru adaptiv cu 512 coeficienți. Astfel, volumul de calcul al RLS-TOT este mult mai avantajos.

Al doilea set de experimente este dedicat identificării unui răspuns la impuls acustic de lungime  $L = 2048$ . În acest caz, configurația de descompunere la RLS-NKP [39] ia în considerare  $L_1^* = 64$  și  $L_2^* = 32$ , în timp ce RLS-TOT propus utilizează  $L_{11} = L_{12} = 32$  și  $L_2 = 2$ . Datorită complexității sale de calcul ridicată, algoritmul RLS convențional este prohibitiv în astfel de scenarii care implică răspunsuri la impuls de lungimi foarte mari. Prin urmare, pentru comparații, alți algoritmi mai practici sunt implicați în următoarele experimente.

În primul experiment din acest set, folosim algoritmul proiecțiilor afine (*affine projection algorithm* - APA) [43] ca reper, deoarece este o alegere foarte uzuală în cadrul compensării ecoului acustic. Motivul principal este că depășește binecunoscutul algoritmul NLMS [26], în special pentru semnalele de intrare foarte corelate. De asemenea, APA este mai puțin costisitor din punct de vedere computațional în comparație cu algoritmul RLS convențional. Principalii parametri ai APA sunt pasul de adaptare (notat cu  $\mu$ ; acesta este o constantă pozitivă mai mică sau egală cu unu) și ordinul de proiecție (denumit  $M$ ; pentru  $M = 1$ , APA se reduce la algoritmul NLMS). Valorile mai mari pentru  $\mu$  și  $M$  îmbunătățesc viteza de convergență și capacitatea de urmărire a algoritmului, dar cresc și dezalinierea. În experimentul efectuat, s-au setat  $\mu = 1$  (cel mai rapid mod de convergență) și  $M = 8$ . Semnalul de intrare este un proces AR(1) și SNR = 20 dB. Algoritmii utilizați în comparații sunt RLS-NKP [39] și RLS-TOT propus, cu valori diferite

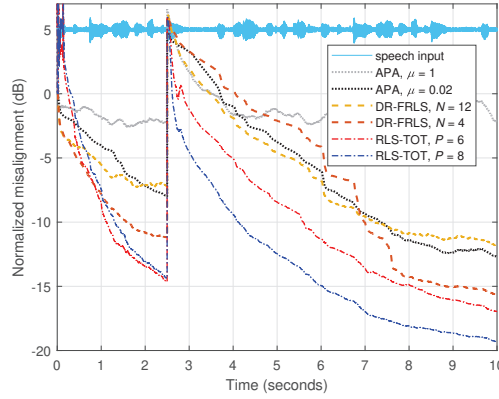


Figure 9: Dezalinierea normată a APA [43], DR-FRLS [44] și RLS-TOT propus (folosind diferite valori ale lui  $P$ ), pentru identificarea unui răspuns la impuls acustic de lungime  $L = 2048$ , când  $\text{SNR} = 10$  dB. Ordinul de proiecție al APA este  $M = 8$  și sunt utilizate diferite valori ale parametrului  $\mu$ . Factorul de uitare al DR-FRLS este  $\lambda = 1$  și sunt luate în considerare diferite valori ale parametrului de reutilizare a datelor  $N$ . RLS-TOT folosește  $\lambda_{11}$  și  $\lambda_{12}$  pe baza relației (63), cu  $K = 100$ , în timp ce  $\lambda_2 = 1$ . Configurația de descompunere a RLS-TOT este aceeași din Fig. 8. Semnalul de intrare este vocal, iar calea de ecou se modifică după 2,5 secunde.

ale parametrilor de descompunere ( $P^*$  și respectiv  $P$ ). Deoarece căile de ecou acustic sunt mai “dense” [1], ar trebui utilizate valori mai mari pentru  $P^*$  și  $P$ , în comparație cu scenariul anterior care a implicat răspunsul la impuls al rețelei; cu toate acestea, aceste valori sunt încă semnificativ mai mici decât  $L_2^*$  și respectiv  $L_{12}$ . Rezultatele sunt prezentate în Fig. 8, unde putem observa capacitatea de urmărire mai bună a RLS-TOT în comparație cu RLS-NKP și APA. În plus, ambii algoritmi de tip RLS ating niveluri de dezaliniere semnificativ mai mici decât APA. În cele din urmă, se poate observa că creșterea valorii lui  $P$  peste o anumită limită (de exemplu,  $P = 8$  în Fig. 8) nu îmbunătățește performanța generală; acest prag se află în apropiere de  $L_{12}/4$ .

O altă soluție interesantă care poate fi folosită ca o alternativă cu complexitate redusă la RLS convențional este algoritmul RLS rapid cu reutilizarea datelor (DR-FRLS) dezvoltat recent [44], cu un ordin de complexitate  $\mathcal{O}(L)$ . Datorită caracteristicilor sale de reutilizare a datelor, acest algoritm poate funcționa cu valoarea maximă a factorului de uitare ( $\lambda = 1$ ), în timp ce își ajustează capacitatea de urmărire pe baza parametrului de reutilizare a datelor, notat cu  $N$ . În experimentul raportat în Fig. 9, s-a utilizat un semnal vocal la intrare, în timp ce operăm într-un mediu “zgomotos”, cu  $\text{SNR} = 10$  dB. Ceilalți algoritmi implicați în comparații sunt APA cu  $M = 8$  și diferiți pași de adaptare și RLS-TOT cu valori diferite ale lui  $P$ . Doi factori de uitare ai RLS-TOT sunt stabiliți pe baza (63),  $\lambda_{11}$  și  $\lambda_{12}$ , în timp ce  $\lambda_2 = 1$ . După cum putem observa, RLS-TOT depășește atât algoritmul APA, cât și algoritmul DR-FRLS, în ceea ce privește viteza de convergență/capacitatea de urmărire și nivelul de dezaliniere, chiar și pentru o valoare mică a parametrului de descompunere (de exemplu,  $P = 6$ , care este mai mică decât  $L_{12}/5$ ). Reducerea pasului de adaptare al APA scade nivelul de dezaliniere, dar și capacitatea de urmărire. Algoritmul DR-FRLS, folosind o valoare mai mare a parametrului de reutilizare a datelor  $N$ , îmbunătățește urmărirea, dar sacrifică acuratețea estimării sale (crește dezalinierea). În concluzie, algoritmul RLS-TOT dezvoltat realizează un compromis mai adecvat între principalele criterii de performanță.

### 3.3 Noi algoritmi adaptivi multicanal

Compensarea ecoului acustic stereofonic (*stereophonic acoustic echo cancellation* - SAEC) este o parte fundamentală a sistemelor de comunicații audio multicanal [45]. Aceste sisteme sunt avantajoase față de cele cu un singur canal deoarece au capacitatea de a transmite informații spațiale (pe lângă informațiile

vocale). Astfel, se realizează o mai bună percepție a sunetului în camera de recepție. De asemenea, un ascultător din camera de recepție este capabil să localizeze vorbitorii în camera de transmisie (în scenariul cu mai mulți vorbitori). Prin urmare, transmisia audio stereofonică asigură o interacțiune mai naturală, care astfel îmbunătățește inteligibilitatea vorbirii.

Pentru fiecare microfon din camera de recepție, SAEC constă în identificarea unui sistem necunoscut cu două intrări, ce reprezintă o combinație paralelă a două căi de ecou acustic. Una dintre principalele probleme ale SAEC este că cele două canale au semnale corelate (provenind de la același vorbitor/difuzor). În consecință, ecuația normală care trebuie rezolvată de algoritmul adaptiv ar putea fi singulară. O soluție practică pentru a rezolva această problemă de “non-unicitate” este reducerea corelației dintre semnalele de difuzor. De exemplu, aceste semnale ar putea fi pre-distorsionate (într-o manieră controlabilă), dar fără a afecta prea mult calitatea sunetului și percepția stereo [46].

În cadrul acestui proiect, am exploatat descompunerea răspunsurilor la impuls acustice implicate în SAEC, folosind NKP (*nearest Kronecker product*) și am luat în considerare aproximări de rang scăzut ale matricelor corespunzătoare acestor sisteme. Ca rezultat, problema de identificare a sistemului convențional, care implică de obicei filtre adaptive de lungime mare, este soluționată folosind o combinație de filtre (mult) mai scurte. Prin urmare, algoritmul RLS bazat pe descompunere astfel rezultat are o complexitate de calcul mai mică, dar deține și caracteristici de convergență îmbunătățite, în comparație cu filtrul RLS convențional.

În cadrul SAEC, pentru fiecare microfon din camera de recepție, avem de a face cu un sistem liniar acustic cu două intrări și o singură ieșire (*two-input single-output* - TISO). Astfel, problema de identificare a sistemului rezultată necesită estimarea a două răspunsuri la impuls acustice,  $\mathbf{h}_1$  și  $\mathbf{h}_2$ , fiecare de lungime  $L$ . Considerând că  $\mathbf{x}_i(n) = [x_i(n) \ x_i(n-1) \ \dots \ x_i(n-L+1)]^T$  este un vector ce conține cele mai recente  $L$  eșantioane ale semnalului de intrare (de medie nulă)  $x_i(n)$ , cu  $i = 1, 2$ , iar  $w(n)$  este un zgomot aditiv de medie nulă, semnalul de microfon la momentul de timp  $n$  este

$$d(n) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}_i(n) + w(n) = y(n) + w(n), \quad (64)$$

unde  $y(n) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}_i(n)$ . În acest context, toate semnalele sunt considerate a fi cu valori reale, iar  $x_i(n)$  și  $w(n)$  sunt independente. Cu toate acestea, în scenariul SAEC,  $x_1(n)$  și  $x_2(n)$  sunt considerate corelate. Alternativ, pentru a simplifica prezentarea și dezvoltarea matematică, putem rescrie (64) ca

$$d(n) = \bar{\mathbf{h}}^T \bar{\mathbf{x}}(n) + w(n), \quad (65)$$

unde  $\bar{\mathbf{h}} = [\mathbf{h}_1^T \ \mathbf{h}_2^T]^T$  și  $\bar{\mathbf{x}}(n) = [\mathbf{x}_1^T(n) \ \mathbf{x}_2^T(n)]^T$ . Se poate observa că modelul de semnal din (65) seamănă cu un sistem cu o singură intrare și o singură ieșire (*single-input single-output* - SISO), în care structura sistemului TISO este omisă. Prin urmare, modelul din (65) ar putea constitui o sursă de erori. Din acest motiv, există modalități mai bune de a beneficia de structura sistemului TISO.

În plus, în problema SAEC [46], se știe că  $x_1(n)$  și  $x_2(n)$  sunt corelate. Prin urmare, matricea  $\mathbf{R}_{\bar{\mathbf{x}}} = E[\bar{\mathbf{x}}(n)\bar{\mathbf{x}}^T(n)]$  este de rang deficitar și poate fi rău condiționată. Acest lucru implică faptul că este foarte dificil să se estimeze corect răspunsul la impuls acustic concatenat,  $\bar{\mathbf{h}}$ . O modalitate de a evita această problemă se bazează pe faptul că răspunsurile la impuls acustice nu sunt de rang complet și astfel se poate folosi abordarea bazată pe descompunerea NKP [1], așa cum se arată în cele ce urmează.

În primul rând, vom considera că  $L = L_1 L_2$ , cu  $L_1 \geq L_2$ . Astfel, cele două răspunsuri la impuls acustice,  $\mathbf{h}_i$ ,  $i = 1, 2$ , pot fi descompuse ca

$$\mathbf{h}_i = \sum_{l=1}^{L_2} \mathbf{h}_{i,2}^l \otimes \mathbf{h}_{i,1}^l, \quad (66)$$

unde  $\otimes$  este produsul Kronecker product, iar  $\mathbf{h}_{i,1}^l$  și  $\mathbf{h}_{i,2}^l$  sunt două răspunsuri la impuls (mai scurte) de lungimi  $L_1$  și respectiv  $L_2$ . Un mod util de a rescrie (66) este  $\mathbf{h}_i = \text{vec} \left[ \sum_{l=1}^{L_2} \mathbf{h}_{i,1}^l \left( \mathbf{h}_{i,2}^l \right)^T \right] =$

$\text{vec}(\mathbf{H}_{i,1}\mathbf{H}_{i,2}^T) = \text{vec}(\mathbf{H}_i)$ , unde  $\text{vec}(\cdot)$  este operația de vectorizare (trecerea de la o matrice la un vector),  $\mathbf{H}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i,1}^1 & \mathbf{h}_{i,1}^2 & \cdots & \mathbf{h}_{i,1}^{L_2} \end{bmatrix}$  și  $\mathbf{H}_{i,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i,2}^1 & \mathbf{h}_{i,2}^2 & \cdots & \mathbf{h}_{i,2}^{L_2} \end{bmatrix}$  sunt două matrice de dimensiuni  $L_1 \times L_2$  și respectiv  $L_2 \times L_2$ , iar  $\mathbf{H}_i$  este o matrice echivalentă (de dimensiune  $L_1 \times L_2$ ) rezultată din  $\mathbf{h}_i$ . Teoretic, fără a avea informații despre  $\mathbf{h}_i$ , matricea  $\mathbf{H}_i$  poate fi considerată de rang maxim, adică  $\text{rank}(\mathbf{H}_i) = L_2$ . Astfel, relația (64) poate fi exprimată ca

$$d(n) = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{l=1}^{L_2} \mathbf{h}_{i,2}^l \otimes \mathbf{h}_{i,1}^l \right)^T \mathbf{x}_i(n) + w(n), \quad (67)$$

ceea ce necesită estimarea a  $2(L + L_2^2) \leq 4L$  parametri, față de cei  $2L$  parametri din formularea standard. Cu toate acestea, dacă  $\text{rank}(\mathbf{H}_i) = P < L_2$ , atunci (67) devine

$$d(n) = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{p=1}^P \mathbf{h}_{i,2}^p \otimes \mathbf{h}_{i,1}^p \right)^T \mathbf{x}_i(n) + w(n) \quad (68)$$

astfel încât vom estima doar  $2P(L_1 + L_2) \leq 4PL_1$  parametri, ceea ce poate fi mult mai mic  $2L$ . În continuare vom considera că  $\text{rank}(\mathbf{H}_i) = P$ , astfel încât modelul din (68) este valid. De asemenea, putem exprima răspunsul la impuls din (68) ca

$$\mathbf{h}_i = \sum_{p=1}^P \left( \mathbf{h}_{i,2}^p \otimes \mathbf{I}_{L_1} \right) \mathbf{h}_{i,1}^p = \sum_{p=1}^P \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,2}^p} \mathbf{h}_{i,1}^p = \underline{\mathbf{H}}_{i,2} \underline{\mathbf{h}}_{i,1}, \quad (69)$$

unde  $\mathbf{I}_{L_1}$  este matricea identitate de dimensiune  $L_1 \times L_1$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,2}^p} = \mathbf{h}_{i,2}^p \otimes \mathbf{I}_{L_1}$  este o matrice de dimensiune  $L \times L_1$ ,  $\underline{\mathbf{H}}_{i,2} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,2}^1} & \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,2}^2} & \cdots & \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,2}^P} \end{bmatrix}$  are dimensiunea  $L \times PL_1$ , iar  $\underline{\mathbf{h}}_{i,1} = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{h}_{i,1}^1 \right)^T & \left( \mathbf{h}_{i,1}^2 \right)^T & \cdots & \left( \mathbf{h}_{i,1}^P \right)^T \end{bmatrix}^T$  este un vector de lungime  $PL_1$ . În mod similar, putem rescrie cele două răspunsuri la impuls acustice într-o altă formă convenabilă, după cum urmează:

$$\mathbf{h}_i = \sum_{p=1}^P \left( \mathbf{I}_{L_2} \otimes \mathbf{h}_{i,1}^p \right) \mathbf{h}_{i,2}^p = \sum_{p=1}^P \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,1}^p} \mathbf{h}_{i,2}^p = \underline{\mathbf{H}}_{i,1} \underline{\mathbf{h}}_{i,2}, \quad (70)$$

unde  $\mathbf{I}_{L_2}$  este matricea identitate de dimensiune  $L_2 \times L_2$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,1}^p} = \mathbf{I}_{L_2} \otimes \mathbf{h}_{i,1}^p$  este o matrice de dimensiune  $L \times L_2$ ,  $\underline{\mathbf{H}}_{i,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,1}^1} & \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,1}^2} & \cdots & \mathbf{H}_{\mathbf{h}_{i,1}^P} \end{bmatrix}$  este de dimensiune  $L \times PL_2$ , iar  $\underline{\mathbf{h}}_{i,2} = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{h}_{i,2}^1 \right)^T & \left( \mathbf{h}_{i,2}^2 \right)^T & \cdots & \left( \mathbf{h}_{i,2}^P \right)^T \end{bmatrix}^T$  este un vector de lungime  $PL_2$ . Prin urmare, putem exprima relația (68) în două moduri diferite:

$$d(n) = \underline{\mathbf{h}}_{i,1}^T \underline{\mathbf{H}}_{i,2}^T \mathbf{x}_1(n) + \underline{\mathbf{h}}_{i,2}^T \underline{\mathbf{H}}_{i,1}^T \mathbf{x}_2(n) + w(n) \quad (71)$$

$$= \underline{\mathbf{h}}_{i,2}^T \underline{\mathbf{H}}_{i,1}^T \mathbf{x}_1(n) + \underline{\mathbf{h}}_{i,1}^T \underline{\mathbf{H}}_{i,2}^T \mathbf{x}_2(n) + w(n). \quad (72)$$

Din expresiile anterioare vedem că structura sistemului TISO se păstrează și poate fi exploatată în partea de identificare.

Într-o formă mai compactă, este convenabil să se exprime relații (71) și (72) ca

$$d(n) = \bar{\mathbf{h}}_{i,1}^T \bar{\mathbf{x}}_{i,2}(n) + w(n) \quad (73)$$

$$= \bar{\mathbf{h}}_{i,2}^T \bar{\mathbf{x}}_{i,1}(n) + w(n), \quad (74)$$

unde  $\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,1} = [ \mathbf{h}_{1,1}^T \quad \mathbf{h}_{2,1}^T ]^T$ ,  $\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,2} = [ \mathbf{h}_{1,2}^T \quad \mathbf{h}_{2,2}^T ]^T$ , iar  $\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1}^T \mathbf{x}_1(n) \\ \mathbf{H}_{2,1}^T \mathbf{x}_2(n) \end{bmatrix}$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,2}^T \mathbf{x}_1(n) \\ \mathbf{H}_{2,2}^T \mathbf{x}_2(n) \end{bmatrix}$ .

Vom considera că  $\mathbf{g}_1(n)$  și  $\mathbf{g}_2(n)$  reprezintă estimările răspunsurilor la impuls acustice  $\mathbf{h}_1$  și  $\mathbf{h}_2$  la momentul de timp  $n$ . Astfel, putem construi  $\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n)$  și  $\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n)$  în același mod în care am construit  $\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,1}$  și  $\bar{\mathbf{h}}_{\cdot,2}$ . Ulterior, putem defini semnalul de eroare a priori între semnalul de referință,  $d(n)$ , și semnalul estimat,  $\hat{y}(n) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{g}_i^T(n-1)\mathbf{x}_i(n)$ , după cum urmează:

$$e(n) = d(n) - \bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}^T(n-1)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n) \quad (75)$$

$$= d(n) - \bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}^T(n-1)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n), \quad (76)$$

unde  $\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,1}^T(n-1)\mathbf{x}_1(n) \\ \mathbf{G}_{2,1}^T(n-1)\mathbf{x}_2(n) \end{bmatrix}$  și  $\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{1,2}^T(n-1)\mathbf{x}_1(n) \\ \mathbf{G}_{2,2}^T(n-1)\mathbf{x}_2(n) \end{bmatrix}$ , cu matricile  $\mathbf{G}_{i,1}(n)$  și  $\mathbf{G}_{i,2}(n)$  definite similar cu  $\mathbf{H}_{i,1}$  și respectiv  $\mathbf{H}_{i,2}$  (pentru  $i = 1, 2$ ).

Pe baza relației (75) și presupunând că  $\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n)$  este fix, putem exprima criteriul LS (*least-squares*) ca

$$\mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}}[\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n)] = \sum_{k=1}^n \lambda_1^{n-k} \left[ d(k) - \bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}^T(n)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(k) \right]^2, \quad (77)$$

unde  $0 < \lambda_1 \leq 1$  este un factor de uitare. Similar, presupunând că  $\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n)$  este fix, criteriul LS devine

$$\mathcal{J}_{\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}}[\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n)] = \sum_{k=1}^n \lambda_2^{n-k} \left[ d(k) - \bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}^T(n)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(k) \right]^2, \quad (78)$$

cu  $0 < \lambda_2 \leq 1$  fiind factorul de uitare. Această abordare este similară cu o strategie de optimizare biliniară, în care unul dintre sisteme este considerat fix în criteriul de optimizare al celuilalt.

În acest punct, pe baza minimizării funcțiilor cost din (77) și (78) în raport cu  $\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n)$  și respectiv  $\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n)$ , ecuațiile normale rezultă ca

$$\mathbf{R}_2(n)\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n) = \mathbf{r}_2(n), \quad (79)$$

$$\mathbf{R}_1(n)\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n) = \mathbf{r}_1(n), \quad (80)$$

unde  $\mathbf{R}_2(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_1^{n-k} \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(k)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}^T(k) = \lambda_1 \mathbf{R}_2(n-1) + \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}^T(n)$ ,  $\mathbf{R}_1(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_2^{n-k} \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(k)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}^T(k) = \lambda_2 \mathbf{R}_1(n-1) + \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}^T(n)$ ,  $\mathbf{r}_2(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_1^{n-k} \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(k)d(k) = \lambda_1 \mathbf{r}_2(n-1) + \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n)d(n)$  și  $\mathbf{r}_1(n) = \sum_{k=1}^n \lambda_2^{n-k} \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(k)d(k) = \lambda_2 \mathbf{r}_1(n-1) + \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n)d(n)$ .

Soluțiile directe ale (79) și (80), care ar implica operații de inversare a matricei, nu sunt eficiente pentru implementările practice ale SAEC. Alternativ, poate fi folosită lema inversării matricei [26], astfel încât cu notația  $\mathbf{P}_2(n) = \mathbf{R}_2^{-1}(n)$  și  $\mathbf{P}_1(n) = \mathbf{R}_1^{-1}(n)$ , actualizările acestor matrici rezultă ca

$$\mathbf{P}_2(n) = \lambda_1^{-1} [\mathbf{I}_{2PL_1} - \mathbf{k}_2(n)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}^T(n)] \mathbf{P}_2(n-1), \quad (81)$$

$$\mathbf{P}_1(n) = \lambda_2^{-1} [\mathbf{I}_{2PL_2} - \mathbf{k}_1(n)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}^T(n)] \mathbf{P}_1(n-1), \quad (82)$$

unde  $\mathbf{I}_{2PL_i}$  (cu  $i = 1, 2$ ) este matricea identitate de dimensiune  $2PL_i \times 2PL_i$ , iar  $\mathbf{k}_2(n)$  și  $\mathbf{k}_1(n)$  sunt vectorii câștig Kalman, cu expresiile

$$\mathbf{k}_2(n) = \frac{\mathbf{P}_2(n-1)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n)}{\lambda_1 + \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}^T(n)\mathbf{P}_2(n-1)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,2}(n)}, \quad (83)$$

$$\mathbf{k}_1(n) = \frac{\mathbf{P}_1(n-1)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n)}{\lambda_2 + \bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}^T(n)\mathbf{P}_1(n-1)\bar{\mathbf{x}}_{\cdot,1}(n)}. \quad (84)$$

Astfel, algoritmul rezultat bazat pe RLS are actualizările:

$$\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n) = \bar{\mathbf{g}}_{\cdot,1}(n-1) + \mathbf{k}_2(n)e(n), \quad (85)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n) = \bar{\mathbf{g}}_{\cdot,2}(n-1) + \mathbf{k}_1(n)e(n). \quad (86)$$

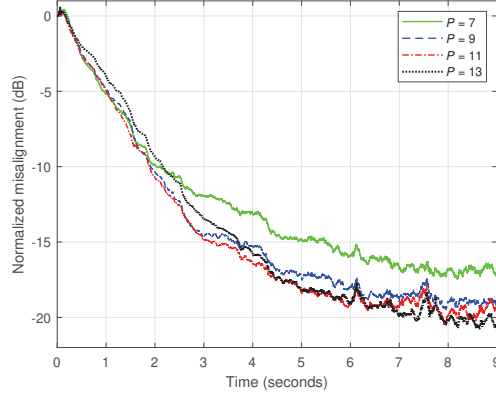


Figure 10: Performanța algoritmului multicanal bazat pe RLS pentru diferite valori ale parametrului de descompunere  $P$ .

Rezumând, algoritmul RLS bazat pe descompunere, dezvoltat pentru SAEC, este definit de relațiile (81)–(86), împreună cu semnalul de eroare din (75) sau (76). Pentru fiecare semnal de microfon, algoritmul propus combină estimările furnizate de două filtre adaptive mai scurte, de lungimi  $2PL_1$  și respectiv  $2PL_2$ , cu  $P < L_2$ . Pe de altă parte, abordarea SISO pe baza (65) implică un filtru adaptiv de lungime mare,  $2L = 2L_1L_2$ . Deoarece complexitatea de calcul a filtrului RLS convențional este proporțională cu pătratul lungimii filtrului, algoritmul bazat pe descompunere deține un avantaj important în ceea ce privește efortul de calcul.

Experimentele au fost efectuate în scenariul SAEC, în care semnalul sursă din camera de transmisie este o secvență de vorbire, cu o rată de eșantionare de 8 kHz. Răspunsurile la impuls acustice,  $\mathbf{h}_1$  și  $\mathbf{h}_2$ , au  $L = 1024$  coeficienți, astfel încât descompunerea poate fi efectuată folosind  $L_1 = L_2 = 32$ . Zgomotul de fundal  $w(n)$  care afectează semnalul de ecou  $y(n)$  este alb și gaussian, astfel încât raportul semnal-zgomot (*signal-to-noise ratio* - SNR) este de 30 dB. Semnalele difuzoarelor sunt preprocesate folosind metoda de predistorsionare din [46].

Măsura de performanță utilizată în experimente este dezalinierea normalizată (în dB), care este evaluată ca  $20\log_{10} \|\hat{\mathbf{h}} - \bar{\mathbf{g}}(n)\|_2 / \|\hat{\mathbf{h}}\|_2$ , unde  $\|\cdot\|_2$  este norma  $\ell_2$ , iar  $\bar{\mathbf{g}}(n) = [\mathbf{g}_1^T(n) \quad \mathbf{g}_2^T(n)]^T$ . Coeficienții răspunsurilor la impuls estimate,  $\mathbf{g}_1(n)$  și  $\mathbf{g}_2(n)$ , rezultă din combinația specifică a coeficienților filtrelor adaptive  $\bar{\mathbf{g}}_{:1}(n)$  și respectiv  $\bar{\mathbf{g}}_{:2}(n)$ .

Factorii de uitare ai algoritmilor bazați pe RLS sunt setați în funcție de lungimea filtrului, pe baza valorii  $1 - 1/(K \cdot \text{lungime})$ , cu  $K > 1$  [39]. În experimente, a fost utilizată valoarea  $K = 5$ , ceea ce conduce la un compromis adecvat între principalele criterii de performanță (urmărire versus dezaliniere).

În primul experiment, a fost evaluată influența parametrului de descompunere  $P$  asupra performanței algoritmului multicanal RLS. Valoarea acestui parametru este legată de rangul aproximativ al matricei  $\mathbf{H}_i$ , cu  $i = 1, 2$ . Se poate observa în Fig. 10 că o valoare mai mare a lui  $P$  îmbunătățește acuratețea soluției (până la un anumit punct), reflectată într-un nivel mai scăzut de dezaliniere. În acest context, un parametru de descompunere în vecinătatea lui  $L_2/3$  conduce la o atenuare rezonabilă a dezalinerii.

Capacitatea de urmărire a algoritmilor bazați pe RLS este un criteriu de performanță important, deoarece rata de convergență inițială nu este întotdeauna relevantă [38]. În experimentul raportat în Fig. 11, algoritmul multicanal dezvoltat este comparat cu omologul său convențional [pe baza (65)] într-un scenariu de urmărire a sistemului, în care răspunsul la impuls  $\mathbf{h}_2$  este schimbat brusc prin inversarea semnului coeficienților săi. După cum putem observa, pentru un nivel similar de dezaliniere, reacția de urmărire a algoritmului multicanal dezvoltat este mai bună în comparație cu versiunea convențională.



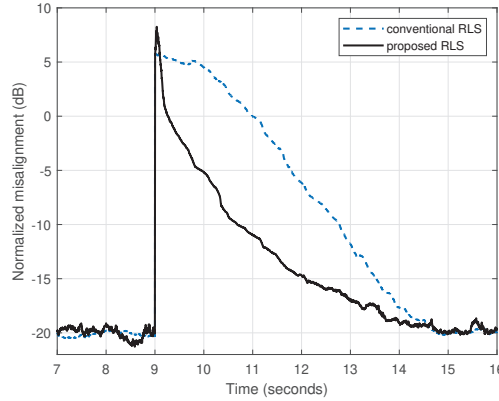


Figure 11: Performanța algoritmului RLS convențional și a algoritmului multicanal RLS bazat pe descompunere (folosind  $P = 13$ ) într-un scenariu de urmărire.

## 4 Impactul estimat al rezultatelor obținute

Performanța algoritmului LMS este guvernată de valoarea pasul de adaptare. În acest context, s-a considerat un model de sistem variabil de timp, iar criteriul de optimizare se bazează pe minimizarea dezaclinierii sistemului. Experimentele efectuate în contextul compensării ecoului acustic indică faptul că acești algoritmi de tip LMS/APA-ICF dezvoltati în cadrul acestui proiect realizează un compromis adecvat în ceea ce privește viteza de convergență/capacitatea de urmărire și dezaclinieria sistemului. Deoarece răspunsurile la impulsul acustice sunt sisteme variabile în timp, considerăm că sistemul necunoscut urmează un model Markov de ordinul întâi, care se potrivește foarte bine în contextul aplicațiilor acustice. Termenul de zgomot din modelul Markov de ordinul întâi reprezintă “incertitudinile” sistemului, iar puterea acestuia este estimată în cadrul algoritmului. Folosind o estimare adecvată a acestui parametru, putem depăși una dintre principalele limitări ale algoritmilor actuali care presupun un context de sistem invariant în timp. În acest fel, algoritmii care încorporează “incertitudinile” sistemului pot urmări mai bine schimbările/variațiile din mediului acustic. Algoritmii respectivi sunt atractivi în cazul aplicațiilor din mediul acustic (de exemplu, compensarea ecoului acustic), unde semnalul de intrare este preponderent semnalul vocal sau audio.

În comparație cu filtrul Wiener, algoritmul RLS-TOT dezvoltat în cadrul acestui proiect nu necesită estimări statistice și este capabil să funcționeze în medii variabile în timp. În plus, cele trei filtre adaptive componente ale RLS-TOT sunt actualizate în paralel, spre deosebire de varianta bazată pe filtrul Wiener iterativ, care alternează secvențial soluțiile legate de cele trei seturi de ecuații Wiener-Hopf. Acest paralelism reprezintă un avantaj în ceea ce privește modularitatea implementării. Deoarece performanța generală a oricărui filtru adaptiv este influențată de lungimea acestuia, versiunea propusă RLS-TOT deține câteva avantaje specifice, după cum urmează. În primul rând, în comparație cu algoritmul RLS convențional, RLS-TOT are o complexitate de calcul mult mai mică. În al doilea rând, cu cât filtrul adaptiv este mai scurt, cu atât viteza de convergență și capacitatea de urmărire a acestuia sunt mai rapide. Prin urmare, deoarece estimarea globală a RLS-TOT rezultă pe baza combinației coeficienților furnizați de trei filtre adaptive mai scurte, depășește în mod clar capacitatea de urmărire a algoritmilor convenționali, care actualizează un singur filtru adaptiv de lungime mare. În al treilea rând, există întotdeauna un compromis între viteza de convergență/capacitatea de urmărire și acuratețea (dezaclinieria) soluției. Acest aspect este legat de alegerea factorilor de uitare ai algoritmilor de tip RLS. Din acest punct de vedere, RLS-TOT este mai robust în comparație cu algoritmii clasici, deoarece factorii săi de uitare pot atinge valori mai mari (mai aproape de unu), sacrificând ușor capacitatea de urmărire, dar îmbunătățind acuratețea estimării sale. În plus, utilizarea unor valori mai mari ai factorilor de uitare aduce un beneficiu în ceea ce privește robustețea numerică a algoritmilor de tip RLS, mai ales când operează cu semnale de intrare nestaționare, cum ar fi semnalul vocal.



Algoritmii multicanal dezvoltati în acest proiect exploatează descompunerea răspunsurilor la impulsul acustice folosind cel mai apropiat produs Kronecker și bazându-se pe aproximări de rang scăzut. De exemplu, algoritmul multicanal RLS dezvoltat pentru SAEC combină soluția a două filtre adaptive mai scurte, obținând astfel o complexitate de calcul mai mică și un comportament de urmărire îmbunătățit, în comparație cu filtrul RLS convențional. Identificarea sistemelor multicanal este o problemă dificilă în contextul multor aplicații importante. Astfel, este nevoie atât de convergență/urmărire rapidă, cât și de complexitate de calcul redusă, ceea ce face ca filtrul RLS convențional să fie prohibitiv pentru astfel de aplicații, în ciuda caracteristicilor sale de convergență. Prin urmare, soluția dezvoltată în cadrul acestui proiect reprezintă o abordare mai eficientă pentru problemele de identificare a sistemelor acustice. Avantajul este legat în principal de cele două criterii importante de performanță: capacitatea de urmărirea rapidă (a schimbărilor de cale acustică) și complexitate scăzută. În concluzie, algoritmii dezvoltati bazați pe descompunere reprezintă o soluție fiabilă pentru problemele de identificare a sistemelor multicanal.

Considerăm că **cel mai semnificativ rezultat obținut** în cadrul acestui proiect este reprezentat de către algoritmul RLS-TOT [5]. Acest algoritm utilizează o nouă metodă bazată pe descompunerea tensorilor de ordinul al treilea (TOT) [3], care beneficiază de un avantaj specific. Astfel, caracteristica sa principală este legată de modul de gestionare a rangului unui tensor de ordinul trei, care este controlat și limitat la valori mici, fără a implica metode de aproximare. Algoritmul RLS-TOT combină estimările a trei filtre adaptive de lungime mult mai mică, având câștiguri atât din punct de vedere al performanței, dar și al complexității. Deoarece lungimea filtrului adaptiv influențează decisiv principalele criterii de performanță (convergență, urmărire și acuratețe), algoritmul RLS-TOT depășește atât algoritmul convențional, cât și soluțiile dezvoltate anterior, care implică o descompunere de ordinul doi. În plus, cele trei filtre componente sunt actualizate în paralel, ceea ce reprezintă un avantaj practic important, în ceea ce privește modularitatea implementării.

## References

- [1] L. M. Dogariu, J. Benesty, C. Paleologu, and S. Ciochină, “Identification of room acoustic impulse responses via Kronecker product decompositions,” *IEEE/ACM Trans. Audio, Speech, Language Processing*, vol. 30, pp. 2828–2841, Sept. 2022.
- [2] I. D. Ficiu, C. L. Stanciu, C. Paleologu, and J. Benesty, “Low-complexity data-reuse RLS algorithm for stereophonic acoustic echo cancellation,” *Applied Sciences*, vol. 13, id. 2227, Feb. 2023 (16 pages).
- [3] J. Benesty, C. Paleologu, and S. Ciochină, “Linear system identification based on a third-order tensor decomposition,” *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 30, pp. 503–507, May 2023.
- [4] J. Benesty, C. Paleologu, and L. M. Dogariu, “An iterative Wiener filter based on a fourth-order tensor decomposition,” *Symmetry*, vol. 15, id. 1560, Aug. 2023 (18 pages).
- [5] C. Paleologu, J. Benesty, C. L. Stanciu, J. R. Jensen, M. G. Christensen, and S. Ciochină, “Recursive least-squares algorithm based on a third-order tensor decomposition for low-rank system identification,” *Signal Processing*, vol. 213, id. 109216, Dec. 2023 (10 pages).
- [6] C. L. Stanciu, J. Benesty, C. Paleologu, R. L. Costea, L. M. Dogariu, and S. Ciochină, “Decomposition-based Wiener filter using the Kronecker product and conjugate gradient method,” *IEEE/ACM Trans. Audio, Speech, Language Processing*, vol. 32, pp. 124–138, Jan. 2024.
- [7] J. Benesty, C. Paleologu, C. L. Stanciu, R. L. Costea, L. M. Dogariu, and S. Ciochină, “Wiener filter using the conjugate gradient method and a third-order tensor decomposition,” *Applied Sciences*, vol. 14, id. 2430, Mar. 2024 (22 pages).
- [8] G. Huang, J. Benesty, J. Chen, C. Paleologu, S. Ciochină, W. Kellermann, and I. Cohen, “Acoustic system identification with partially time-varying models based on tensor decompositions,” in *Proc. Int. Workshop on Acoustic Signal Enhancement (IWAENC)*, Bamberg, Germany, 2022, pp. 1–5.
- [9] B. Moroșanu, V. Popa, C. Negrescu, and I. D. Ficiu, “Control room design for subjective audio critical listening,” in *Proc. International Conference on Advanced Topics in Optoelectronics, Microelectronics and Nanotechnologies (ATOM-N)*, Constanța, Romania, 2022, pp. 1–8.

- [10] J. Benesty, L. M. Dogariu, C. Paleologu, and S. Ciochină, “An iterative Wiener filter for stereophonic acoustic echo cancellation,” in *Proc. IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, Pacific Grove, USA, 2022, pp. 1–5.
- [11] I. D. Fîciu, L. M. Dogariu, R. L. Costea, C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, “A Kalman filter for the identification of impulse responses with particular symmetry features,” in *Proc. International Symposium on Electronics and Telecommunications (ISETC)*, Timișoara, Romania, 2022, pp. 1–4.
- [12] I. D. Fîciu, C. L. Stanciu, C. Elisei-Iliescu, C. Anghel, and C. Paleologu, “A data-reuse approach for the RLS-DCD algorithm,” *IARIA Congress*, 2022, pp. 85–86, Nice, France. [“Best Paper Award”]
- [13] C. Paleologu, J. Benesty, C. L. Stanciu, R. L. Costea, L. M. Dogariu, and S. Ciochină, “Iterative Wiener filter based on third-order tensor decomposition and coordinate descent method,” in *Proc. IEEE International Symposium on Electrical and Electronics Engineering (ISEEE)*, 2023 pp. 156–161, Galați, Romania.
- [14] C. L. Stanciu, C. Anghel, and C. Elisei-Iliescu, “Regularized RLS adaptive algorithm with conjugate gradient method,” in *Proc. IEEE International Conference on Speech Technology and Human-Computer Dialogue (SpeD)*, 2023, pp. 18–23, Bucharest, Romania.
- [15] B. Moroșanu, M. Negru, A. Neacșu, C. Negrescu, C. Paleologu, and C. Burileanu, “Personalized multi-track leveling algorithm,” in *Proc. IEEE International Conference on Speech Technology and Human-Computer Dialogue (SpeD)*, 2023, pp. 24–29, Bucharest, Romania.
- [16] L. M. Dogariu, C. Paleologu, J. Benesty, C. L. Stanciu, and S. Ciochină, “A decomposition-based Kalman filter for the identification of acoustic impulse responses,” in *Proc. European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 2023, pp. 351–355, Helsinki, Finland.
- [17] C. L. Stanciu, C. Paleologu, J. Benesty, R. L. Costea, L. M. Dogariu, and S. Ciochină, “Iterative Wiener filter using a Kronecker product decomposition and the coordinate descent method,” in *Proc. IEEE Int. Symposium on Signals, Circuits and Systems (ISSCS)*, 2023 (4 pages), Iași, Romania.
- [18] I. D. Fîciu, C. L. Stanciu, C. Elisei-Iliescu, C. Anghel, L. Stanciu, and R. M. Udrea, “Efficient RLS algorithms with line search methods for stereophonic acoustic echo cancellation,” in *Proc. IEEE International Symposium on Signals, Circuits and Systems (ISSCS)*, 2023 (4 pages), Iași, Romania.
- [19] E. V. Dumitrașcu, R. A. Dobre, and I. D. Fîciu, “Comparative analysis of the RLS algorithm with Kronecker product decomposition for acoustic impulse response identification,” in *Proc. International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, 2023, pp. 139–143, virtual.
- [20] R. A. Dobre, C. Paleologu, J. Benesty, and F. Albu, “On the decomposition parameter of the RLS algorithm based on the nearest Kronecker product,” in *Proc. IEEE International Conference on Electronics, Computers and Artificial Intelligence (ECAI)*, 2023 (4 pages), Bucharest, Romania.
- [21] I. D. Fîciu, C. L. Stanciu, C. Paleologu, J. Benesty, C. Elisei-Iliescu, C. Anghel, and S. Ciochină, “Stereophonic acoustic echo cancellation with the RLS algorithm using the conjugate gradient method,” in *Proc. International Conference on Advances in Signal Processing and Artificial Intelligence (ASPAI)*, 2023, pp. 55–57, Tenerife, Spain.
- [22] I. D. Fîciu, C. L. Stanciu, C. Paleologu, and F. Albu, “On the performance of a low-complexity data-reuse RLS algorithm for stereophonic acoustic echo cancellation,” in *Proc. International Conference on Digital Telecommunications (ICDT)*, 2023 (4 pages), Venice, Italy. [“Best Paper Award”]
- [23] I. D. Fîciu, C. Elisei-Iliescu, L. M. Dogariu, C. Paleologu, C. L. Stanciu, and C. Anghel, “Design of third-order tensorial RLS adaptive filtering algorithms,” in *Proc. Int. Conf. Advances in Signal, Image and Video Processing (SIGNAL)*, 2024, pp. 28–32, Athens, Greece. [“Best Paper Award”]
- [24] C. L. Stanciu, C. Anghel, C. Elisei-Iliescu, L. M. Dogariu, I. D. Fîciu, and C. Paleologu, “On the regularization of a low-complexity recursive least-squares adaptive algorithm,” in *Proc. International Conference on Adaptive and Self-Adaptive Systems and Applications (ADAPTIVE)*, 2024, pp. 26–28, Venice, Italy. [“Best Paper Award”]
- [25] R. Otopoleanu, C. Elisei-Iliescu, C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, “Regularized RLS algorithm based on third-order tensor decomposition,” in *Proc. IEEE Conference Advanced Topics on Measurement and Simulation (ATOMS)*, 2024, Constanța, Romania. (*accepted for publication*)

- [26] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*. Fourth Edition, New York, NY: Springer-Verlag, 2013.
- [27] H.-C. Shin, A. H. Sayed, and W.-J. Song, “Variable step-size NLMS and affine projection algorithms,” *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 11, pp. 132–135, Feb. 2004.
- [28] J. Benesty, H. Rey, L. Rey Vega, and S. Tressens, “A nonparametric VSS-NLMS algorithm,” *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 13, pp. 581–584, Oct. 2006.
- [29] H. Rey, L. Rey Vega, S. Tressens, and J. Benesty, “Variable explicit regularization in affine projection algorithm: robustness issues and optimal choice,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, pp. 2096–2108, May 2007.
- [30] S. Ciochină, C. Paleologu, and J. Benesty, “An optimized NLMS algorithm for system identification,” *Signal Processing*, vol. 118, pp. 115–121, Jan. 2016.
- [31] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. Morgan & Claypool Publishers, Synthesis Lectures on Speech and Audio Processing, 2010.
- [32] J. Benesty, T. Gaensler, D. R. Morgan, M. M. Sondhi, and S. L. Gay, *Advances in Network and Acoustic Echo Cancellation*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2001.
- [33] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, “Study of the general Kalman filter for echo cancellation,” *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.*, vol. 21, pp. 1539–1549, Aug. 2013.
- [34] S. Ciochină, C. Paleologu, J. Benesty, and S. L. Grant, “An optimized proportionate adaptive algorithm for sparse system identification,” in *Proc. IEEE Asilomar*, 2015, 5 pages.
- [35] C. Paleologu, S. Ciochină, and J. Benesty, “Variable step-size NLMS algorithm for under-modeling acoustic echo cancellation,” *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 15, pp. 5–8, 2008.
- [36] M. A. Iqbal and S. L. Grant, “Novel variable step size NLMS algorithms for echo cancellation,” in *Proc. IEEE ICASSP*, 2008, pp. 241–244.
- [37] J. Benesty and S. L. Gay, “An improved PNLMS algorithm,” in *Proc. IEEE ICASSP*, 2002, pp. II-1881–II-1884.
- [38] Y. V. Zakharov and V. H. Nascimento, “DCD-RLS adaptive filters with penalties for sparse identification,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 61, pp. 3198–3213, June 2013.
- [39] C. Elisei-Iliescu, C. Paleologu, J. Benesty, C. Stanciu, C. Anghel, and S. Ciochină, “Recursive least-squares algorithms for the identification of low-rank systems,” *IEEE/ACM Trans. Audio, Speech, Language Processing*, vol. 27, pp. 903–918, May 2019.
- [40] T. G. Kolda and B. W. Bader, “Tensor decompositions and applications,” *SIAM Review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.
- [41] *Digital Network Echo Cancellers*, ITU-T Recommendation G.168, 2012.
- [42] Y. V. Zakharov, G. P. White, and J. Liu, “Low-complexity RLS algorithms using dichotomous coordinate descent iterations,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 56, pp. 3150–3161, July 2008.
- [43] K. Ozeki and T. Umeda, “An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties,” *Electron. Commun. Jpn.*, vol. 67-A, pp. 19–27, May 1984.
- [44] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, “Data-reuse recursive least-squares algorithms,” *IEEE Signal Processing Lett.*, vol. 29, pp. 752–756, Mar. 2022.
- [45] J. Benesty, C. Paleologu, T. Gänsler, and S. Ciochină, *A Perspective on Stereophonic Acoustic Echo Cancellation*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2011.
- [46] J. Benesty, D. R. Morgan, and M. M. Sondhi, “A better understanding and an improved solution to the specific problems of stereophonic acoustic echo cancellation,” *IEEE Trans. Speech, Audio Process.*, vol. 6, pp. 156–165, Mar. 1998.

**Director proiect,**  
**Paleologu Constantin**