Noi algoritmi de tip LMS cu convergenţă variabilă

SINTEZA FAZEI UNICE / 2011

Contract nr. 7/5.08.2010, Cod TE-50

Convergenţa algoritmilor de tip LMS poate fi controlată prin prisma a doi parametri. În primul rând, pasul de adaptare al algoritmului realizează compromisul între viteza de convergenţă şi dezadaptare. Cel de al doilea parametru este factorul de regularizare, ce aparent urmăreşte evitarea unei probleme de nesingularitate. În literatura de specialitate există numeroase variante de algoritmi de tip LMS cu pas de adaptare variabil, dezvoltaţi în scopul obţinerii unui compromis avantajos între cele două criterii de performanţă enunţate anterior. Cu toate acestea, se poate demostra că factorul de regularizare joacă de asemenea un rol deosebit de important în acest context, în special în situaţiile practice în care semnalul de referinţă este afectat de un zgomot.

În cadrul acestei etape de cercetare a proiectului, am dezvoltat o nouă familie de algoritmi adaptivi de tip LMS cu convergenţă variabilă, pe baza controlului factorului de regularizare. S-au elaborat expresii optimale pentru acest parametru, ţinând cont de prezenţa şi nivelul zgomotului ce afectează semnalul de referinţă al filtrului adaptiv. Vom prezenta în continuare sintetic abordarea în cazul a trei algoritmi foarte utilizaţi în aplicaţiile de compensare a ecoului [1]. Este vorba despre NLMS (*Normalized Least-Mean-Square*), *signed-regressor* NLMS (SR-NLMS) şi *improved proportionate* NLMS (IPNLMS). Prezentarea detaliată a acestor rezultate, precum şi extinderea în cazul altor algoritmi a fost publicată în [2].

Să presupunem că avem următorul semnal de referinţă:

$$d(n) = \mathbf{h}^T\mathbf{x}(n) + w(n) = y(n) + w(n), \tag{1}$$

unde $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{L-1} \end{bmatrix}^T$ este răspunsul la impuls al sistemului necunoscut (ce urmează a fi identificat) de lungime L, $\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) & x(n-1) & \cdots & x(n-L+1) \end{bmatrix}^T$ este vectorul semnalului de intrare şi $w(n)$ este un zgomot aditiv de medie nulă. Secvenţa $y(n)$ joacă rolul semnalului de ecou într-o aplicaţie de compensare a ecoului. De asemenea, putem defini raportul semnal pe zgomot sau ecou pe zgomot astfel:

$$\text{ENR} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_w^2} = \frac{\mathbf{h}^T\mathbf{R_x}\mathbf{h}}{\sigma_w^2}, \tag{2}$$

unde $\sigma_y^2 = E\left[y^2(n)\right]$ şi $\sigma_w^2 = E\left[w^2(n)\right]$ sunt varianţele lui $y(n)$ şi $w(n)$, iar $\mathbf{R_x} = E\left[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\right]$ reprezintă matricea de corelaţie a lui $\mathbf{x}(n)$. În acest context, obiectivul principal este de a identifica/estima $\mathbf{h}$ cu un filtru adaptiv

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \left[\begin{array}{cccc} \hat{h}_0(n) & \hat{h}_1(n) & \cdots & \hat{h}_{L-1}(n) \end{array}\right]^T, \tag{3}$$

astfel încât dezalinierea normată să îndeplinească următoarea condiţie:

$$\frac{\left\|\hat{\mathbf{h}}(n) - \mathbf{h}\right\|_2^2}{\|\mathbf{h}\|_2^2} \leq \iota, \tag{4}$$

unde ι este o constantă pozitivă mică şi $\|\cdot\|_2$ reprezintă norma ℓ_2.

Algoritmul NLMS este definit de următoarele relaţii:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1) = d(n) - \hat{y}(n), \tag{5}$$

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \alpha\frac{\mathbf{x}(n)e(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}, \tag{6}$$

unde α $(0 < \alpha < 2)$ este pasul de adaptare şi δ este constanta de regularizare. Relaţia de reactualizare a coeficienţilor se poate rescrie astfel:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \mathbf{P}(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1) + \alpha\tilde{\mathbf{h}}(n), \tag{7}$$

unde

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{I} - \alpha\frac{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)}, \tag{8}$$

şi

$$\tilde{\mathbf{h}}(n) = \frac{\mathbf{x}(n)d(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n)} \tag{9}$$

reprezintă termenul de corecţie al algoritmului NLMS. De fapt, $\tilde{\mathbf{h}}(n)$ se obţine prin

$$\min_{\tilde{\mathbf{h}}(n)} \left[d(n) - \mathbf{x}^T(n)\tilde{\mathbf{h}}(n)\right]^2 \quad \text{s.t.} \quad \delta\left\|\tilde{\mathbf{h}}(n)\right\|_2^2. \tag{10}$$

Deoarece $\tilde{e}(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n)\tilde{\mathbf{h}}(n)$ este eroarea dintre semnalul de referinţă şi semnalul obţinut pe baza optimizării (10), parametrul de regularizare se poate obţine din condiţia

$$E\left[\tilde{e}^2(n)\right] = \sigma_w^2. \tag{11}$$

De asemenea, avem relaţia (valabilă pentru $L \gg 1$)

$$\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) = L\sigma_x^2. \tag{12}$$

Dezvoltând (11) şi ţinând cont de (12), se obţine ecuaţia:

$$\delta^2 - 2\frac{L\sigma_x^2}{\text{ENR}}\delta - \frac{\left(L\sigma_x^2\right)^2}{\text{ENR}} = 0, \tag{13}$$

ce are soluţia:

$$\delta = \frac{L\left(1+\sqrt{1+\text{ENR}}\right)}{\text{ENR}}\sigma_x^2 = \beta_{\text{NLMS}}\sigma_x^2, \tag{14}$$

unde

$$\beta_{\text{NLMS}} = \frac{L\left(1+\sqrt{1+\text{ENR}}\right)}{\text{ENR}}. \tag{15}$$

În plus, $\lim_{\text{ENR}\to 0}\delta = \infty$ şi $\lim_{\text{ENR}\to\infty}\delta = 0$, ceea ce justifică validitatea rezultatului obţinut.

În cazul algoritmului SR-NLMS avem relaţiile:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - \hat{y}(n), & (16)\\ \hat{\mathbf{h}}(n) &= \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \alpha\frac{\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right]e(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right]}, & (17)\end{aligned}$$

Performanţele sale sunt echivalente cu cele ale algoritmului NLMS, dar având o complexitate mai scăzută (cu L multiplicări).

Descompunerea relaţiei de reactualizare a algoritmului SR-NLMS se face tot pe baza (7), dar acum

$$\mathbf{P}(n) = \mathbf{I} - \alpha\frac{\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right]\mathbf{x}^T(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right]} \tag{18}$$

şi

$$\tilde{\mathbf{h}}(n) = \frac{\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right]d(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right]}. \tag{19}$$

Astfel avem

$$\mathbf{x}^T(n)\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right] = LE\left[|x(n)|\right]. \tag{20}$$

Presupunând că semnalul $x(n)$ este Gaussian şi utilizând teorema Price se obţine

$$E\left[|x(n)|\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}}\sigma_x^2 = \beta_x\sigma_x^2,$$

unde

$$\beta_x = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma_x^2}}. \tag{21}$$

De asemenea, avem

$$\mathbf{x}^T(n)\text{sgn}\left[\mathbf{x}(n)\right] = L\beta_x\sigma_x^2. \tag{22}$$

Pe baza condiţiilor (11) şi (22) se obţine ecuaţia:

$$\delta^2 - 2\frac{L\beta_x\sigma_x^2}{\text{ENR}}\delta - \frac{\left(L\beta_x\sigma_x^2\right)^2}{\text{ENR}} = 0. \tag{23}$$

Soluţia rezultată este

$$\delta = \frac{L\beta_x\left(1+\sqrt{1+\text{ENR}}\right)}{\text{ENR}}\sigma_x^2 = \beta_{\text{SR}-\text{NLMS}}\sigma_x^2,$$

unde

$$\beta_{\text{SR}-\text{NLMS}} = \frac{L\beta_x\left(1+\sqrt{1+\text{ENR}}\right)}{\text{ENR}}. \tag{24}$$

Algoritmii de tip *proportionate* au la bază ideea de reactualizare a coeficienţilor filtrului adaptiv în funcţie de amplitudinea fiecăruia, favorizând astfel adaptarea mai rapidă a coeficienţilor semnificativi [3]. Aceşti algoritmi se pretează foarte bine în cazul identificării sistemelor de tip *sparse*, cum este cazul căilor de ecou (de linie sau acustic) [4]. Algoritmul IPNLMS [5] face parte din această categorie, fiind foarte utilizat în practică datorită simplităţii şi eficacităţii sale. Acest algoritm are la bază relaţiile:

$$e(n) = d(n) - \hat{y}(n), \tag{25}$$

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \hat{\mathbf{h}}(n-1) + \alpha\frac{\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n)e(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n)}, \tag{26}$$

unde $\mathbf{G}(n-1) = \text{diag}\begin{bmatrix} g_0(n-1) & g_1(n-1) & \cdots & g_{L-1}(n-1)\end{bmatrix}$ este o matrice de dimensiune $L\times L$,

$$g_l(n-1) = \frac{1-\kappa}{2L} + (1+\kappa)\frac{\left|\hat{h}_l(n-1)\right|}{2\left\|\hat{\mathbf{h}}(n-1)\right\|_1},\ 0\le l\le L-1, \tag{27}$$

κ $(-1\le\kappa<1)$ este parametrul de "proporţionalitate", iar $\|\cdot\|_1$ reprezintă norma ℓ_1.

Relaţia de reactualizare IPNLMS se poate rescrie astfel [6]:

$$\hat{\mathbf{h}}(n) = \mathbf{P}'(n)\hat{\mathbf{h}}(n-1) + \alpha\tilde{\mathbf{h}}'(n), \tag{28}$$

unde

$$\mathbf{P}'(n) = \mathbf{I} - \alpha\frac{\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n)} \tag{29}$$

şi

$$\tilde{\mathbf{h}}'(n) = \frac{\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n)d(n)}{\delta + \mathbf{x}^T(n)\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n)} \tag{30}$$

reprezintă componenta de corecţie a algoritmului. În acest context, se poate arăta că $\tilde{\mathbf{h}}'(n)$ reprezintă o soluţie a problemei de optimizare:

$$\min_{\tilde{\mathbf{h}}'(n)}\left[d(n) - \mathbf{x}^T(n)\tilde{\mathbf{h}}'(n)\right]^2 \quad \text{s. t.} \quad \delta\left\|\tilde{\mathbf{h}}'(n)\right\|_1. \tag{31}$$

Prin urmare, pe baza condiţiei (11) se poate obţine expresia parametrului de regularizare optim. Pentru $L\gg 1$ şi presupunând că semnalul $x(n)$ este staţionar, rezultă

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(n)\mathbf{G}(n-1)\mathbf{x}(n) &= \frac{1-\kappa}{2L}\mathbf{x}^T(n)\mathbf{x}(n) + \frac{1+\kappa}{2\left\|\hat{\mathbf{h}}(n-1)\right\|_1}\sum_{l=0}^{L-1}x^2(n-l)\left|\hat{h}_l(n-1)\right| \\ &\approx \frac{1-\kappa}{2}\sigma_x^2 + \frac{1+\kappa}{2}\sigma_x^2 \\ &\approx \sigma_x^2. \end{aligned} \tag{32}$$

Utilizând condiţiile (11) şi (32), se obţine ecuaţia:

$$\delta^2 - 2\frac{\sigma_x^2}{\text{ENR}}\delta - \frac{\left(\sigma_x^2\right)^2}{\text{ENR}} = 0, \tag{33}$$

a cărei soluţie este

$$\delta = \frac{1 + \sqrt{1 + \text{ENR}}}{\text{ENR}}\sigma_x^2 = \beta_{\text{IPNLMS}}\sigma_x^2, \tag{34}$$

unde

$$\beta_{\text{IPNLMS}} = \frac{1 + \sqrt{1 + \text{ENR}}}{\text{ENR}}. \tag{35}$$

Abordarea poate fi extinsă într-o manieră similară şi pentru algoritmul SR-IPNLMS, precum în cazul algoritmului proiecţiilor afine (APA) [7].

O serie de simulări au fost efectuate în contextul unei aplicaţii de compensare a ecoului acustic. Calea de ecou are 512 coeficienţi (la o frecvenţă de eşantionare de 8 kHz), iar filtrul adaptiv are lungimea $L = 512$. Semnalul de intrare $x(n)$ este zgomot alb Gaussian sau secvenţă vocală. Zgomotul de fond este presupus alb şi Gaussian, cu ENR = 10 dB. Performanţele algoritmilor au fost evaluate prin prisma dezalinierii normate (în dB), mediată pe 20 de realizări independente. Performanţele obţinute utilizând parametrii de regularizare optimi au fost comparate cu cele obţinute în cazul unor valori constante. Rezultatele prezentate în figurile anexate justifică validitatea soluţiilor propuse.

References

[1] J. Benesty, T. Gaensler, D. R. Morgan, M. M. Sondhi, and S. L. Gay, *Advances in Network and Acoustic Echo Cancellation*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2001.

[2] J. Benesty, C. Paleologu, and S. Ciochină, "On regularization in adaptive filtering," *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 19, pp. 1734–1742, Aug. 2011.

[3] D. L. Duttweiler, "Proportionate normalized least-mean-squares adaptation in echo cancelers," *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, vol. 8, pp. 508–518, Sept. 2000.

[4] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, *Sparse Adaptive Filters for Echo Cancellation*. Morgan & Claypool Publishers, 2010.

[5] J. Benesty and S. L. Gay, "An improved PNLMS algorithm," in *Proc. IEEE ICASSP*, 2002, pp. 1881–1884.

[6] J. Benesty, C. Paleologu, and S. Ciochină, "Proportionate adaptive filters from a basis pursuit perspective," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, pp. 985–988, Dec. 2010.

[7] C. Paleologu, J. Benesty, and S. Ciochină, "Regularization of the affine projection algorithm," *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 58, pp. 366–370, June 2011.

Director de proiect

Conf. dr. ing. Constantin Paleologu

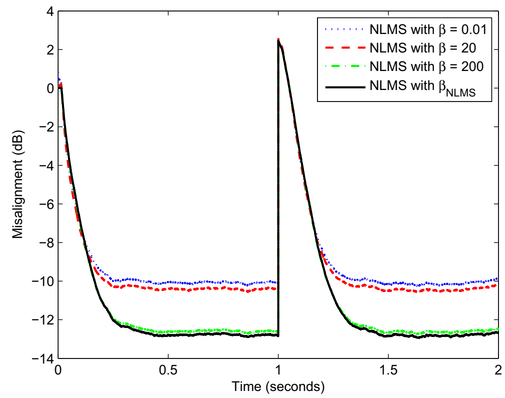

Figure 1: Performanţele algoritmului NLMS, zgomot alb Gaussian la intrare.

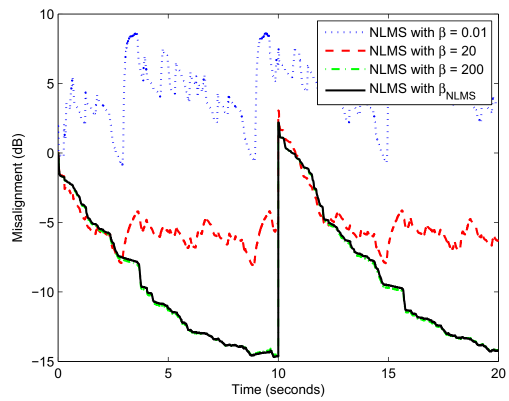

Figure 2: Performanţele algoritmului NLMS, semnal vocal la intrare.

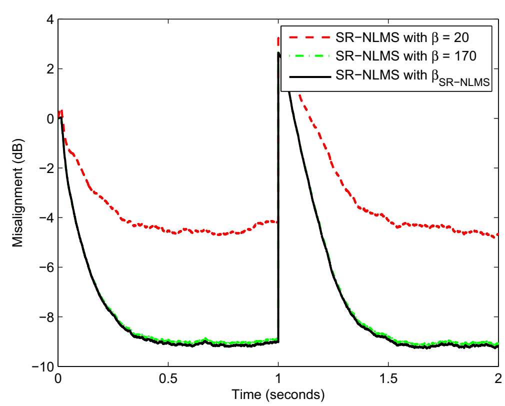

Figure 3: Performanţele algoritmului SR-NLMS, zgomot alb Gaussian la intrare.

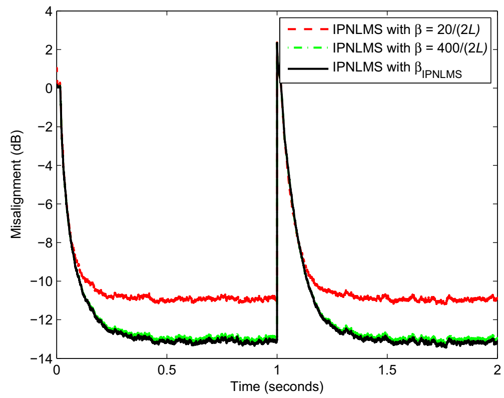

Figure 4: Performanţele algoritmulului IPNLMS, zgomot alb Gaussian la intrare.

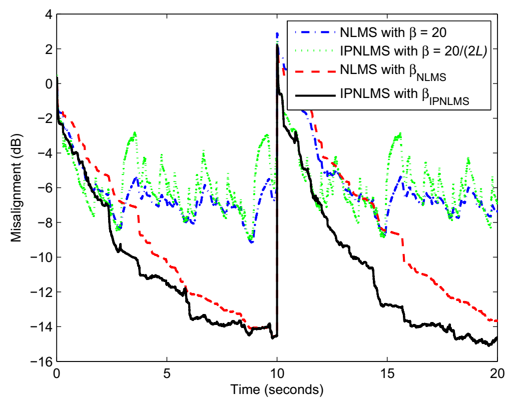

Figure 5: Performanţele algoritmilor NLMS şi IPNLMS, semnal vocal la intrare.

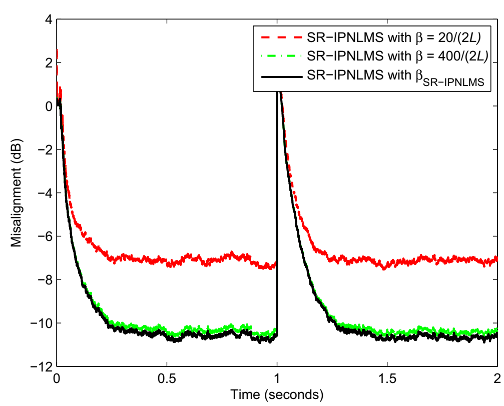

Figure 6: Performanţele algoritmulului SR-IPNLMS, zgomot alb Gaussian la intrare.